

# THÉORIE ERGODIQUE DES FRACTIONS RATIONNELLES SUR UN CORPS ULTRAMÉTRIQUE

CHARLES FAVRE<sup>†</sup> AND JUAN RIVERA-LETIELIER<sup>‡</sup>

**RÉSUMÉ.** On donne les premiers éléments pour l'étude des propriétés ergodiques d'une fraction rationnelle à coefficients dans un corps algébriquement clos et complet pour une norme non archimédienne. En particulier, pour une telle fraction rationnelle  $R$  on montre l'existence d'une mesure naturelle  $\rho_R$  représentant la distribution asymptotique des préimages itérées de chaque point non exceptionnel de  $R$ . On montre que cette mesure est (exponentiellement) mélangeante, et qu'elle satisfait au théorème limite central. De plus, on donne une estimation de l'entropie métrique de cette mesure, et de l'entropie topologique de  $R$ , qui permettent de caractériser les fractions rationnelles d'entropie topologique nulle.

**ABSTRACT.** We make the first steps towards an understanding of the ergodic properties of a rational map defined over a complete algebraically closed non-archimedean field. For such a rational map  $R$ , we construct a natural invariant probability measure  $\rho_R$  which represents the asymptotic distribution of preimages of non-exceptional point. We show that this measure is exponentially mixing, and satisfies the central limit theorem. We prove some general bounds on the metric entropy of  $\rho_R$ , and on the topological entropy of  $R$ . We finally prove that rational maps with vanishing topological entropy have potential good reduction.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Généralités	7
3. La mesure d'équilibre	20
4. Entropie	29
5. Exemples	33
Références	40

---

*Date:* 10 juillet 2009.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary : 37F10, Secondary : 11S85, 37E25.

Les deux auteurs ont été financé partiellement par le projet ECOS-Sud No. C07E01, ainsi que par le projet ANR-Berko.

<sup>†</sup> Remercie chaleureusement le projet FONDECYT N 7050221 de la CONICYT, Chile, qui a permis son séjour à l'Universidad Católica del Norte.

<sup>‡</sup> Partiellement soutenu par les projets FONDECYT N 1040683 et Research Network on Low Dimensional Dynamics, PBCT ACT-17, de la CONICYT, Chile, et par le projet MeceSup UCN 0202.

## 1. INTRODUCTION

Cet article est dédié à l'étude des propriétés ergodiques d'une fraction rationnelle à coefficients dans un corps  $K$  algébriquement clos et complet par rapport à une norme ultramétrique  $|\cdot|$ . Plus précisément, on étudie l'action d'une telle fraction rationnelle sur l'espace analytique de Berkovich  $P_K^1$ , associé à la droite projective  $\mathbb{P}_K^1$ . Cet article précise et complète la note [FR1].

La dynamique des fractions rationnelles à coefficients dans un corps ultramétrique apparaît naturellement dans plusieurs contextes. Un travail récent de Kiwi [K] relie l'espace des modules des polynômes cubiques complexes à la dynamique de certaines fractions rationnelles sur le corps ultramétrique des séries de Puiseux. Une deuxième source d'exemples provient de questions arithmétiques. À une fraction rationnelle  $R$  à coefficients algébriques sur  $\mathbb{Q}$  est associée une fonction réelle sur une clôture algébrique  $\overline{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$ , appelée *hauteur dynamique*. On montre que cette hauteur est complètement déterminée par la dynamique de  $R$  en chacune des complétions de  $\overline{\mathbb{Q}}$ , y compris les complétions  $p$ -adiques de ce corps, pour chaque nombre premier  $p$ . On est donc naturellement amené à regarder l'action de  $R$  sur ces corps non archimédiens. Nous renvoyons à [Ben, BH, BR1, CL, CLT, FR2, ST] pour une analyse de ces hauteurs s'appuyant sur la dynamique des fractions rationnelles à coefficients dans un corps ultramétrique. On pourra consulter le livre récent de Silverman [Sil2] pour d'autres exemples et références.

Dans cet article, on s'intéresse principalement aux propriétés ergodiques d'une fraction rationnelle agissant sur l'espace analytique de Berkovich  $P_K^1$  associé à  $\mathbb{P}_K^1$ , voir [Ber1], ou [BR2, E, R6] pour une approche élémentaire. Dans le cas complexe l'entropie topologique est égale au logarithme du degré de la fraction rationnelle, et il existe une unique mesure d'entropie maximale [Gr, Lj, Man]. De plus cette mesure possède des propriétés remarquables d'équidistribution : elle décrit la distribution asymptotique des préimages itérées d'un point non exceptionnel, ainsi que la distribution asymptotique des points périodiques [Br, To, FLM, Lj]. Le développement récent d'une théorie du potentiel dans un cadre non archimédien [BR2, FJ, Th], analogue à la théorie du potentiel complexe, a permis la construction d'une mesure analogue lorsque le corps de base est ultramétrique. Notre but est ici de décrire les propriétés générales de cette mesure, et d'en tirer quelques conclusions sur l'entropie topologique des fractions rationnelles en question.

**1.1. Dynamique sur la droite projective de Berkovich.** Dans toute la suite,  $(K, |\cdot|)$  désigne un corps métrisé non archimédien, que l'on suppose *complet et algébriquement clos*. Pour la plupart des résultats, nous ne ferons aucune hypothèse sur la caractéristique de  $K$ , ni sur la caractéristique résiduelle de  $K$ .

L'espace projectif standard  $\mathbb{P}_K^1$  muni de la métrique sphérique est tout à la fois totalement discontinu et non localement compact. Ces deux faits cumulés rendent délicate toute théorie de la mesure, et plus généralement toute analyse sur  $\mathbb{P}_K^1$ . C'est pour cette raison qu'il est plus naturel de considérer l'action des fractions rationnelles sur la *droite projective de Berkovich*  $P_K^1$ . Cet espace peut être construit de plusieurs manières différentes. Il s'identifie par exemple à l'arbre réel obtenu par complétion de l'espace des boules de  $K$ , par rapport à une métrique adéquate. On a un plongement naturel de  $\mathbb{P}_K^1$  dans  $P_K^1$ , associant à  $z \in \mathbb{P}_K^1$  la boule de centre  $z$  et de rayon nul. On notera  $\mathbb{H}_K$  le complémentaire de  $\mathbb{P}_K^1$  dans  $P_K^1$ . L'espace  $P_K^1$  possède deux topologies naturelles : une

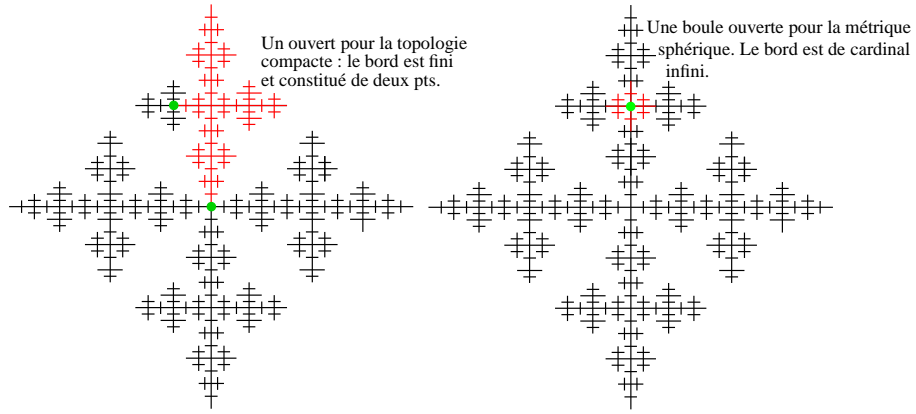


FIG. 1. Deux topologies sur un arbre

métrisable provenant de la métrique sphérique, qui n'est pas localement compacte, et une autre plus grossière et compacte, qui n'est pas métrisable en général, voir Figure 1. Cette dernière topologie est adaptée pour la théorie de la mesure.

L'action d'une fraction rationnelle  $R$  sur  $\mathbb{P}_K^1$  s'étend de façon naturelle en une action continue sur  $\mathbb{P}_K^1$ . En particulier, à chaque point  $S$  de  $\mathbb{P}_K^1$  on peut associer de façon naturelle un *degré local*  $\deg_R(S)$ , qui coïncide avec le degré local usuel lorsque  $S \in \mathbb{P}_K^1$ . De façon analogue au cas complexe, lorsque  $R$  est de degré au moins deux on décompose  $\mathbb{P}_K^1$  en deux ensembles disjoints et totalement invariants : l'ensemble de Fatou  $F_R$ , et l'ensemble de Julia  $J_R$ . Le premier est l'ouvert des points où la dynamique est « régulière » ; le second est un compact sur lequel la dynamique est « chaotique », voir [R2, R7].

**1.2. La mesure d'équilibre et ses propriétés d'équidistribution.** Pour chaque  $S \in \mathbb{P}_K^1$  on note  $[\mathcal{S}]$  la masse de Dirac en  $S$ . Chaque fraction rationnelle  $R$  induit une action continue  $R^*$  sur les mesures boréliennes et positives, telle que pour chaque  $S \in \mathbb{P}_K^1$ , on ait

$$R^*[\mathcal{S}] = \sum_{S' \in R^{-1}(S)} \deg_R(S') [\mathcal{S}'] .$$

Voir §2.2 pour plus de précisions.

Rappelons qu'un point  $z \in \mathbb{P}_K^1$  est *exceptionnel* pour  $R$  si l'ensemble de ses préimages itérées est fini. Une fraction rationnelle admet au plus deux points exceptionnels, sauf dans le cas où la caractéristique de  $K$  est strictement positive et  $R$  est conjuguée à un itéré de l'automorphisme de Frobenius. Dans ce dernier cas l'ensemble exceptionnel est infini dénombrable.

**Théorème A.** Soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$  et de degré au moins 2. Alors il existe une mesure de probabilité  $\rho_R$  définie sur  $\mathbb{P}_K^1$ , telle que pour toute mesure de probabilité  $\rho$  définie sur  $\mathbb{P}_K^1$ , on ait convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} R^{n*} \rho = \rho_R , \quad (1.1)$$

si et seulement si  $\rho$  ne charge pas l'ensemble exceptionnel de  $R$ . En particulier la mesure  $\rho_R$  est caractérisée comme l'unique mesure de probabilité  $\rho$  ne chargeant pas l'ensemble exceptionnel et telle que  $R^*\rho = \deg(R)\rho$ .

De plus, la mesure  $\rho_R$  est mélangeante, ne charge aucun point de  $\mathbb{P}_K^1$ , et son support topologique est égal à l'ensemble de Julia de  $R$ .

On appellera  $\rho_R$  la *mesure d'équilibre* de  $R$ . Nous donnerons une version quantitative du fait que  $\rho_R$  ne charge pas les points de  $\mathbb{P}_K^1$  en estimant la masse des boules en fonction de leur diamètre, voir la Proposition 3.3. Par contre, cette mesure peut charger un point de  $\mathbb{H}_K = \mathbb{P}_K^1 \setminus \mathbb{P}_K^1$ , voir le Théorème E ci-dessous.

On montrera que la mesure d'équilibre est exponentiellement mélangeante et satisfait au théorème limite central par rapport aux observables de classe  $\mathcal{C}^1$ , voir les Propositions 3.5 et 3.6 du §3.3. Dans le cas complexe le mélange exponentiel a été montré dans [FS1, FS2, H], et le théorème limite central dans [DPU]. On utilise ici les méthodes de la théorie du potentiel développées dans [CLB, DS3, FS1, FS2].

Lorsque la mesure  $\rho = [S]$  est la masse de Dirac située en un point non exceptionnel  $S$  dans  $\mathbb{P}_K^1$ , pour tout entier positif  $n$  on a,

$$R^{n*}[S] = \sum_{S' \in R^{-n}(S)} \deg_{R^n}(S')[S'] .$$

Le Théorème A montre alors que la mesure  $\rho_R$  décrit la distribution asymptotique des préimages itérées de tout point non exceptionnel. Dans le cas arithmétique cette propriété est une conséquence de l'équidistribution des points de petite hauteur montrée dans [BR1, CL, FR3], et on a de plus des estimations quantitatives de la convergence [FR3]. La propriété analogue dans le cas complexe a été montrée dans [Br, FLM, Lj].

Dans le cas complexe la mesure d'équilibre décrit la distribution asymptotique de suites plus générales de points, voir [Lj] et aussi [To]. Lorsque le corps de base  $K$  est de caractéristique nulle, nous obtenons l'analogue non archimédien.

**Théorème B.** *Supposons que la caractéristique du corps  $K$  soit nulle, et soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$  de degré au moins 2. Pour toute fraction rationnelle non constante  $S \in K(z)$  et pour tout entier  $n \geq 0$  tel que  $R^n \neq S$ , notons  $[R^n = S]$  la mesure supportée sur l'ensemble fini  $\{z \in \mathbb{P}_K^1, R^n(z) = S(z)\}$ , et dont la masse en  $z$  est égal à la multiplicité de  $z$  comme solution de  $R^n = S$ . Alors, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} [R^n = S] = \rho_R . \quad (1.2)$$

Lorsque  $S(z) = z$  la mesure  $[R^n = S]$  est supportée sur les points périodiques de période  $n$  dans  $\mathbb{P}_K^1$ , chargeant chaque point selon sa multiplicité comme point périodique. Le Théorème B montre alors que la mesure  $\rho_R$  décrit la distribution asymptotique des points périodiques dans  $\mathbb{P}_K^1$ . Lorsque le corps de base est de caractéristique  $p > 0$ , cette dernière propriété n'est pas vérifiée en général. Par exemple, si l'on pose  $P_0(z) = z + z^p$ , alors pour tout entier positif  $n$  on a  $P_0^{p^n}(z) = z + z^{p^{p^n}}$ , d'où  $[P_0^n = S] = p^{p^n}[0] + [\infty]$  et  $p^{-p^n}[P_0^{p^n} = S] \rightarrow [0]$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Or la mesure  $\rho_{P_0}$  ne charge pas 0 par le Théorème A. Il serait intéressant de décrire toutes les fractions rationnelles  $R$  et  $S$  pour lesquelles  $\deg(R)^{-n}[R^n = S]$  ne converge pas vers la mesure d'équilibre lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Notons que pour  $S(z) = z$  seuls les points périodiques dans  $\mathbb{P}_K^1$  interviennent dans (1.2). En réalité, l'équation (1.2) ne peut être valide si l'on prend en compte tous les points périodiques de  $R$  dans  $\mathbb{P}_K^1$ , car en général  $R$  en admet une infinité non dénombrable (c'est le cas si  $K$  est de caractéristique mixte et  $R$  admet un point périodique indifférent, voir [R3, Proposition 5.8]). On peut cependant formuler la question suivante.

**Question 1.** Les points périodiques répulsifs sont-ils équidistribués asymptotiquement par rapport à la mesure d'équilibre ?

Enfin dans le cas où  $R$  est définie sur un *corps de nombres*, Szpiro-Tucker [ST] ont démontré une version plus forte de (1.2) qui permet entre autres d'estimer l'exposant de Lyapunov de  $R$  par rapport à la mesure  $\rho_R$  :

$$\deg(R)^{-n} \sum_{z \in \mathbb{P}_K^1, R^n(z)=z} \log |R'| (z) \rightarrow \int \log |R'| d\rho_R .$$

**1.3. Entropie.** Pour étudier l'entropie topologique nous introduisons le nombre

$$\deg_{\text{top}}(R) := \max\{\#(R^{-1}(z)), z \in \mathbb{P}_K^1\} ,$$

qu'on appellera *le degré topologique de  $R$* . Lorsque la caractéristique de  $K$  est nulle, cet entier est égal à  $\deg(R)$ . Lorsque la caractéristique de  $K$  est  $p > 1$ , alors on peut écrire  $R$  de façon unique comme  $R(z) = Q(z^q)$ , où  $Q$  est une fraction rationnelle séparable et  $q \geq 1$  est une puissance de  $p$ . Dans ce cas on a  $\deg_{\text{top}}(R) = \deg(Q)$ . Dans tous les cas  $\deg(R)/\deg_{\text{top}}(R)$  est un entier, égal au degré local de  $R$  en chaque point de  $\mathbb{P}_K^1$ , avec un nombre fini d'exceptions.

Dans le cas complexe, l'entropie topologique d'une fraction rationnelle est égale au logarithme de son degré, et il existe une unique mesure d'entropie maximale [Gr, Lj, Man]. La situation dans le cas non archimédien est nettement plus compliquée. Par exemple, pour chaque entier  $d \geq 5$  et chaque  $a \in K$  satisfaisant  $|a| \in (0, 1)$ , la fraction rationnelle

$$R_0(z) = \frac{z^{d-2}}{1 + (az)^d} ,$$

satisfait,

$$0 < h_{\rho_{R_0}}(R_0) < h_{\text{top}}(R_0) = \log 2 < \log d = \log \deg_{\text{top}}(R_0) , \quad (1.3)$$

où  $h_{\rho_{R_0}}(R_0)$  est l'entropie métrique de la mesure  $\rho_{R_0}$ , et  $h_{\text{top}}(R_0)$  est l'entropie topologique de  $R_0$ . Et ceci reste même valable dans un voisinage ouvert de  $R_0$  dans l'espace des fractions rationnelles de degré  $d$ , voir §5.2.

**Théorème C.** Soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$  et de degré au moins deux. Alors on a

$$h_{\text{top}}(R) = h_{\text{top}}(R|_{J_R}), \text{ et } 0 \leq h_{\rho_R}(R) \leq h_{\text{top}}(R) \leq \log \deg_{\text{top}}(R) . \quad (1.4)$$

Nous donnerons aussi une estimation de l'entropie métrique de la mesure d'équilibre en termes de la fonction degré local. Pour cela on définit le *degré moyen* de  $R$  par

$$\underline{\deg}(R) := \exp \left[ \int_{\mathbb{P}_K^1} \log \deg_R(\mathcal{S}) d\rho_R(\mathcal{S}) \right] .$$

**Théorème D.** *On a*

$$h_{\rho_R}(R) \geq \log \left( \frac{\deg(R)}{\deg(R)} \right). \quad (1.5)$$

*Si de plus  $\rho_R$  ne charge pas  $\mathbb{H}_K$ , alors on a*

$$h_{\rho_R}(R) = h_{\text{top}}(R) = \log \deg_{\text{top}}(R) > 0.$$

On obtient l'estimation (1.5) comme une conséquence de la formule de Rokhlin, et par conséquent l'égalité est équivalente à l'existence d'une partition génératrice d'entropie finie associée à  $R$ , voir [P, PU]. Dans la Section 5.3 nous décrivons un exemple où  $R$  n'est pas localement injective sur un sous-ensemble non dénombrable de son ensemble de Julia, ce qui rend extrêmement délicat la construction d'une telle partition. Malgré cela, nous posons la question suivante.

**Question 2.** Pour toute fraction rationnelle, a-t-on égalité dans (1.5) ?

On verra sur des exemples que les difficultés dans les calculs d'entropie sont toutes liées au fait que la fraction rationnelle n'est pas séparable ou possède une réduction non séparable. Lorsque ces phénomènes sont absents (par exemple lorsque la caractéristique résiduelle est nulle), il est possible de faire une analyse plus fine, de préciser le Théorème C, et de répondre par l'affirmative à la question précédente. Cette étude sera détaillée dans [FR3].

L'estimation (1.5) permet aussi de caractériser les fractions rationnelles d'entropie topologique nulle. Rappelons qu'une fraction rationnelle  $R := P/Q$  avec  $P, Q \in K[z]$  a *bonne réduction* si les réductions  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  de  $P$  et  $Q$  dans le corps résiduel de  $K$  sont non nulles, et si la fraction  $\tilde{P}/\tilde{Q}$  a même degré que  $R$ .

**Théorème E.** *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $h_{\text{top}}(R) = 0$  ;
- (2)  $h_{\rho_R}(R) = 0$  ;
- (3) *il existe une coordonnée dans laquelle  $R$  a bonne réduction ;*
- (4) *la mesure  $\rho_R$  est la masse de Dirac située en un point de  $\mathbb{H}_K^{|K^*|}$  ;*
- (5) *la mesure  $\rho_R$  charge un point de  $\mathbb{P}_K^1$  .*

L'ensemble  $\mathbb{H}_K^{|K^*|}$  est défini au §2 et est constitué des points de branchements de l'arbre réel  $\mathbb{P}_K^1$ .

Mentionnons tout de suite le résultat suivant que nous généraliserons dans [FR3]. Une fraction rationnelle est dite *modérée* si le sous-ensemble  $\{\deg_R \geq 2\}$  de  $\mathbb{P}_K^1$  est inclus dans un arbre fini. Par exemple, lorsque la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle, toute fraction rationnelle est modérée. Les Théorèmes D et E, et le fait que pour un polynôme modéré l'intersection de l'ensemble de Julia avec  $\{\deg_R \geq 2\}$  est finie, impliquent le résultat suivant.

**Corollaire F.** *Soit  $P$  un polynôme modéré qui ne soit pas conjugué à un polynôme ayant bonne réduction. Alors  $h_{\rho_R}(R) = h_{\text{top}}(R) = \log \deg_{\text{top}}(R)$ .*

**1.4. Plan.** Nous commençons en §2.1 par rappeler la définition de l'espace projectif au sens de Berkovich et nous y décrivons rapidement sa géométrie. Au §2.2, nous donnons les propriétés principales de l'action d'une fraction rationnelle sur cet espace, et au §2.3 nous rappelons les définitions des ensembles de Fatou et Julia, ainsi que certaines propriétés qui nous seront utiles par la suite. Nous indiquons alors comment construire une théorie du potentiel sur  $\mathbb{P}_K^1$  adaptée à nos besoins (§2.4).

La Section 3 contient la construction de la mesure d'équilibre (§3.1), ainsi que la preuve du Théorème A §3.2 et du Théorème B §3.4. Nous montrons aussi les propriétés de mélange de la mesure d'équilibre (§3.3).

Nous attaquons les problèmes d'entropie au §4. On commence par quelques généralités sur l'entropie topologique dans les espaces compacts non métrisables §4.1, puis nous donnons la preuve du Théorème C §4.2, et les preuves des Théorèmes D et E et du Corollaire F §4.3.

Nous concluons cet article en explicitant quatre exemples qui nous semblent caractéristiques en §5.

**1.5. Remerciements :** nous tenons à remercier les deux rapporteurs pour leur lecture extrêmement détaillée du papier et leurs suggestions pour en améliorer la rédaction.

## 2. GÉNÉRALITÉS

Cette partie contient un certain nombre de résultats et de faits sur la géométrie de la droite projective sur un corps normé non archimédien, ainsi que sur les propriétés de base des fractions rationnelles.

Dans le reste de cet article on fixe un corps algébriquement clos  $K$ , muni d'une norme non archimédienne  $|\cdot|$  pour laquelle il est complet. On note  $\mathcal{O}_K := \{z \in K, |z| \leq 1\}$  l'anneau des entiers de  $K$ , et  $\mathfrak{m}_K := \{z \in K, |z| < 1\}$  son unique idéal maximal. Le corps résiduel sera noté  $\tilde{K} := \mathcal{O}_K / \mathfrak{m}_K$ , c'est un corps algébriquement clos.

Rappelons qu'une semi-norme multiplicative sur un anneau commutatif  $R$  muni d'une unité est une fonction  $|\cdot| : R \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $|1| = 1$ ,  $|ab| = |a| \cdot |b|$ , et  $|a + b| \leq \max\{|a|, |b|\}$  pour tout  $a, b \in R$ . Si  $\{a, |a| = 0\}$  est réduit à  $\{0\}$  alors  $|\cdot|$  est une norme non-archimédienne sur  $R$ .

**2.1. La droite projective au sens de Berkovich.** Nous renvoyons à [BR2, Ber1] pour plus d'informations.

Soit  $A_K^1$  l'espace de toutes les semi-normes multiplicatives définies sur  $K[z]$ , dont la restriction à  $K$  est égale à  $|\cdot|$ . On note de plus  $\mathcal{S}_\infty$  la fonction définie sur  $K[z]$ , qui est constante égale à  $\infty$  sur tous les polynômes non constants de  $K$ , et telle que pour chaque polynôme constant  $P \equiv a$  on ait  $\mathcal{S}_\infty(P) = |a|$ . On pose  $\mathbb{P}_K^1 = A_K^1 \sqcup \{\mathcal{S}_\infty\}$  et on munit  $\mathbb{P}_K^1$  de la topologie la moins fine telle que pour chaque  $P \in K[z]$  la fonction  $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}(P)$  soit continue. L'espace  $\mathbb{P}_K^1$  est alors compact et séquentiellement compact. On l'appelle *espace analytique de Berkovich* associé à  $\mathbb{P}_K^1$ .

Chaque point  $z \in K$  induit une semi-norme, qu'on notera aussi par  $z$ , définie par  $z(P) = |P(z)|$ . On obtient ainsi un homéomorphisme de  $\mathbb{P}_K^1 = K \cup \{\infty\}$  sur son image. Dans la suite, on identifiera  $\mathbb{P}_K^1$  avec son image dans  $\mathbb{P}_K^1$ .

À chaque boule  $B = \{|z - z_0| \leq r\}$  de  $K$  correspond la semi-norme  $\mathcal{S}_B$  dans  $A_K^1$ , définie par  $\mathcal{S}_B(P) = \sup_B |P(z)|$ . Plus généralement, toute suite décroissante  $\{B_i\}_{i \geq 0}$

de boules de  $K$  induit une semi-norme  $P \mapsto \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{B_i}(P)$ . Réciproquement, toute semi-norme dans  $A_K^1$  est de cette forme et les points de  $P_K^1$  se rangent donc dans l'une des quatre catégories suivantes (voir par exemple [Ber1, p.18]) :

- i) les points de  $P_K^1$  ;
- ii) les points rationnels, de la forme  $\mathcal{S}_B$ , avec  $B = \{|z - a| \leq r\}$  et  $r \in |K^*|$  ;
- iii) les points irrationnels, de la forme  $\mathcal{S}_B$ , avec  $B = \{|z - a| \leq r\}$  et  $r \notin |K^*|$  ;
- iv) les points singuliers, associés à une suite décroissante de boules de  $K$  dont l'intersection est vide.

Notons que tous les points de type (ii), (iii) et (iv) sont des normes qui s'étendent à  $K(z)$ , alors que la semi-norme  $|\cdot|_{z_0}$  associée à un point  $z_0 \in P_K^1$  vérifie  $|z - z_0|_{z_0} = 0$ . On notera par  $\mathbb{H}_K$  l'ensemble  $P_K^1 \setminus P_K^1$ , par  $\mathbb{H}_K^{|K^*|}$  le sous-ensemble de  $\mathbb{H}_K$  des points rationnels de  $P_K^1$ , et par  $\mathbb{H}_K^o$  le complémentaire dans  $\mathbb{H}_K$  de l'ensemble de ses points singuliers. On appelle *point canonique*<sup>1</sup> la norme associée à la boule unité  $\{z \in K, |z| \leq 1\}$  et on le note  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ . Etant donné un point rationnel ou irrationnel  $\mathcal{S}$ , on désigne par  $B_{\mathcal{S}}$  la boule de  $K$  correspondante. Elle coïncide avec l'intersection avec  $K$  du complémentaire dans  $A_K^1$  de la composante connexe non bornée de  $A_K^1 \setminus \mathcal{S}$ . Lorsque  $z \in K$  on pose  $B_z = \{z\}$ , et si  $z = \infty$ , on note  $B_{\infty} = K$ .

Chaque fraction rationnelle  $R \in K(z)$  agit sur  $P_K^1 \setminus P_K^1$ . Un point  $\mathcal{S}$  dans cet espace est en effet une norme sur  $K[z]$ , et donc induit une norme sur le corps des fractions  $K(z)$ . On définit alors  $R(\mathcal{S})$  comme la norme vérifiant  $R(\mathcal{S})(P) := \mathcal{S}(P \circ R)$ . Cette action s'étend continûment en une action de  $R$  sur  $P_K^1$  qui coïncide avec l'action naturelle de  $R$  sur  $P_K^1$ .

*Structure d'arbre.* C'est un fait fondamental que  $P_K^1$  possède une structure d'arbre réel, que nous allons maintenant décrire brièvement. Considérons l'ordre partiel  $\leq$  défini sur l'espace  $P_K^1$  par  $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$  si et seulement si pour tout  $P \in K[z]$  on a  $\mathcal{S}(P) \leq \mathcal{S}'(P)$ . Lorsque  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont non singuliers, on a  $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$  si et seulement si  $B_{\mathcal{S}} \subset B_{\mathcal{S}'}$ . On vérifie que le point  $\mathcal{S}_{\infty}$  est l'unique élément maximal de  $P_K^1$  et que l'ensemble des éléments minimaux coïncide avec l'union de  $K$  et des points singuliers.

Étant donnés  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  dans  $P_K^1$ , on définit  $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}' \in P_K^1$  par

$$(\mathcal{S} \vee \mathcal{S}')(P) = \inf\{\widehat{\mathcal{S}}(P), \widehat{\mathcal{S}} \in P_K^1, \mathcal{S} \leq \widehat{\mathcal{S}}, \mathcal{S}' \leq \widehat{\mathcal{S}}\}.$$

On vérifie qu'on a  $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}' = \mathcal{S}$  si et seulement si  $\mathcal{S}' \leq \mathcal{S}$  et que  $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}' = \mathcal{S}_{\infty}$  si et seulement si  $\mathcal{S}$  ou  $\mathcal{S}'$  est égale à  $\mathcal{S}_{\infty}$ . Lorsque  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont des points non singuliers dans  $A_K^1$ , le point  $\mathcal{S} \vee \mathcal{S}'$  est la semi-norme associée à la plus petite boule de  $K$  qui contient  $B_{\mathcal{S}}$  et  $B_{\mathcal{S}'}$ .

L'ordre partiel  $\leq$  définit alors une structure d'arbre dans  $A_K^1$  (resp.  $P_K^1$ ) au sens suivant. Pour chaque paire de points distincts  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ , l'ensemble

$$[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] = \{\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S} \leq \tilde{\mathcal{S}} \leq \mathcal{S} \vee \mathcal{S}' \text{ ou } \mathcal{S}' \leq \tilde{\mathcal{S}} \leq \mathcal{S} \vee \mathcal{S}'\}.$$

est l'unique arc topologique dans  $A_K^1$  (resp.  $P_K^1$ ) ayant  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  comme extrémités. Un ensemble de la forme  $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$  est appelé *segment*. On dira qu'un point  $\mathcal{S}$  est *entre* les points  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}''$  lorsque  $\mathcal{S} \in [\mathcal{S}', \mathcal{S}']$ . Dans ce cas on a  $[\mathcal{S}', \mathcal{S}''] = [\mathcal{S}', \mathcal{S}] \cup [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ .

<sup>1</sup>aussi appelé point de Gauss, voir [BR2]



Notons que pour chaque triplet de points  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}''$  il existe un unique point qui est entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ , entre  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}''$  et entre  $\mathcal{S}''$  et  $\mathcal{S}$ .

*Métrie sphérique.* Diverses fonctions définies sur  $K$  s'étendent de manière naturelle à  $A_K^1$ . Ceci permet de définir une métrique sur  $P_K^1$  étendant la métrique sphérique de  $\mathbb{P}_K^1$ .

Commençons par définir les fonctions  $|\cdot|$  et  $\text{diam} : A_K^1 \rightarrow [0, +\infty)$ . Pour  $z_0 \in K$  on pose  $P_{z_0}(z) = z - z_0 \in K[z]$ . Alors,

$$|\mathcal{S}| = \mathcal{S}(P_0) \text{ et } \text{diam}(\mathcal{S}) = \inf_{z \in K} \mathcal{S}(P_z) .$$

Lorsque  $\mathcal{S}$  est un point non singulier de  $A_K^1$ , on a

$$|\mathcal{S}| = \sup_{B_{\mathcal{S}}} |z| \text{ et } \text{diam}(\mathcal{S}) = \text{diam}(B_{\mathcal{S}}) .$$

En particulier, la restriction de  $|\cdot|$  à  $K$  coïncide avec la norme de  $K$ . La fonction  $|\cdot|$  s'annule uniquement au point 0. Pour tout  $\mathcal{S} \in A_K^1$ , on a  $|\mathcal{S}| \geq \text{diam}(\mathcal{S})$  et  $\text{diam}(\mathcal{S}) = 0$  si et seulement si  $\mathcal{S} \in K$ . Enfin, la fonction  $|\cdot|$  est continue et s'étend continûment à  $P_K^1$  en posant  $|\infty| = +\infty$ .

A l'aide des fonctions précédentes, on définit maintenant :

$$\sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} = \text{diam}(\mathcal{S} \vee \mathcal{S}') , \text{ pour } \mathcal{S}, \mathcal{S}' \in P_K^1 .$$

Lorsque  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont des points non singuliers de  $A_K^1$ , on a

$$\sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} = \sup\{|z - z'|, z \in B_{\mathcal{S}}, z' \in B_{\mathcal{S}'}\} ,$$

et en particulier pour tous  $z, z' \in K$  on a  $\sup\{z, z'\} = |z - z'|$ . On vérifie aisément que

$$\sup\{\cdot, 0\} = |\cdot| \text{ et } \sup\{\cdot, \mathcal{S}_{\text{can}}\} = \max\{1, |\cdot|\} .$$

La métrique sphérique<sup>2</sup>  $d_{P_K^1}$  sur  $\mathbb{P}_K^1$  est définie, pour  $z, w \in K$ , par

$$d_{P_K^1}(z, w) = \frac{2|z - w|}{\max\{1, |z|\} \times \max\{1, |w|\}} ,$$

et  $d_{P_K^1}(z, \infty) = 2 \max\{1, |z|\}^{-1}$ . On étend naturellement cette métrique à  $P_K^1$  en posant, pour  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in A_K^1$  :

$$d_{P_K^1}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \frac{2 \sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\}}{\max\{1, |\mathcal{S}|\} \times \max\{1, |\mathcal{S}'|\}} - \frac{\text{diam}(\mathcal{S})}{\max\{1, |\mathcal{S}|\}^2} - \frac{\text{diam}(\mathcal{S}')}{\max\{1, |\mathcal{S}'|\}^2} ,$$

et  $d_{P_K^1}(\mathcal{S}, \infty) = 2 \max\{1, |\mathcal{S}|\}^{-1}$ . On vérifie que cette métrique est compatible avec la structure d'arbre de  $P_K^1$  au sens que pour tous  $\mathcal{S}, \mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in P_K^1$  on a  $d_{P_K^1}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = d_{P_K^1}(\mathcal{S}, \mathcal{S}'') + d_{P_K^1}(\mathcal{S}'', \mathcal{S}')$  si et seulement si  $\mathcal{S}'' \in [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ . L'espace métrique  $(P_K^1, d_{P_K^1})$  est complet, mais il n'est pas localement compact. En particulier la topologie sur  $P_K^1$  induite par cette distance ne coïncide pas avec la topologie introduite précédemment. Elle ne jouera pas de rôle dans la suite.

Introduisons maintenant quelques notations. Une *boule ouverte* (resp. *fermée*) de  $A_K^1$  est un ensemble de la forme  $\{\mathcal{S} \in P_K^1, \sup\{\mathcal{S}, a\} < r\}$  (resp.  $\{\mathcal{S} \in P_K^1, \sup\{\mathcal{S}, a\} \leq$

<sup>2</sup>aussi appelée « small model metrics » dans [BR2]

$r\}$ ), où  $a \in K$  et  $r > 0$ . On notera  $B(z, r)$  (resp.  $\bar{B}(z, r)$ ) ces ensembles. Leurs intersections avec  $K$  seront notées

$$B(z, r) = B(z, r) \cap K, \bar{B}(z, r) = \bar{B}(z, r) \cap K.$$

Une *boule ouverte* (resp. *fermée*) de  $P_K^1$  est une boule ouverte (resp. fermée) de  $A_K^1$  ou le complémentaire dans  $P_K^1$  d'une boule fermée (resp. ouverte) de  $A_K^1$ . Il est facile de voir que toute boule de  $P_K^1$  est connexe.

Un *affinoïde* (resp. *ouvert fondamental*) est une réunion finie d'intersections finies (non vides) de boules fermées (resp. ouvertes). Un ouvert fondamental  $U$  possède un nombre fini de points dans son bord. Notons enfin que les boules ouvertes (resp. les ouverts fondamentaux) de  $P_K^1$  forment une sous-base (resp. base) de la topologie de  $P_K^1$ .

*L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}_K$ .* Rappelons que  $\mathbb{H}_K = P_K^1 \setminus \mathbb{P}_K^1$ . C'est un ensemble connexe, donc un sous-arbre de  $P_K^1$ . La fonction<sup>3</sup>  $d_{\mathbb{H}_K}$  définie par

$$d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = 2 \log \sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} - \log \text{diam}(\mathcal{S}) - \log \text{diam}(\mathcal{S}'),$$

est une distance sur  $\mathbb{H}_K$ . Lorsque  $\mathcal{S} \leq \mathcal{S}'$  on a  $d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \log(\text{diam}(\mathcal{S}')/\text{diam}(\mathcal{S}))$ . L'espace métrique  $(\mathbb{H}_K, d_{\mathbb{H}_K})$  est complet et la métrique est à nouveau compatible avec la structure d'arbre de  $\mathbb{H}_K$ . Notons de plus que  $d_{\mathbb{H}_K}$  est invariante par l'action du groupe  $\text{PGL}(2, K)$  des automorphismes de  $\mathbb{P}_K^1$ . De ce fait, on déduit que  $(\mathbb{H}_K, d_{\mathbb{H}_K})$  est isométrique à l'arbre réel de  $\text{PGL}(2, K)$  décrit dans [Ti], voir [R3, §7.2]. Enfin pour chaque  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$  on a

$$d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}}) = -\log d_{P_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1). \quad (2.1)$$

Fixons un point base  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{H}_K$ . Le *produit de Gromov* est la fonction

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_0} : P_K^1 \times P_K^1 \rightarrow [0, +\infty]$$

définie comme suit. Étant donnés  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in P_K^1$ , notons  $\mathcal{S}''$  l'unique point de  $P_K^1$  qui est entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ , entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_0$  et entre  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{S}_0$ . On pose alors

$$\langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0} = \begin{cases} d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}'', \mathcal{S}_0) & \text{si } \mathcal{S}'' \in \mathbb{H}_K; \\ +\infty & \text{si } \mathcal{S}'' \in \mathbb{P}_K^1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que  $\langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0} = +\infty$  si et seulement si  $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \in \mathbb{P}_K^1$ ; et que  $\langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0} = 0$  si et seulement si  $\mathcal{S}_0 \in [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ . En particulier, pour tout  $\mathcal{S} \in P_K^1$  on a  $\langle \mathcal{S}, \mathcal{S}_0 \rangle_{\mathcal{S}_0} = 0$ . En général, on a  $\langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0} \leq d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_0)$ , avec égalité si et seulement si  $\mathcal{S} \in [\mathcal{S}', \mathcal{S}_0]$ .

**2.2. Fractions rationnelles.** Fixons une fraction rationnelle non constante  $R$  à coefficients dans  $K$ . On vérifie que l'image de tout ouvert fondamental est encore un ouvert fondamental. Une preuve est donnée dans [R2, Proposition 2.6].

<sup>3</sup>aussi appelée « big model metrics » dans [BR2]

*Degré topologique.* Le degré topologique  $\deg_{\text{top}}(R)$  de  $R$  est par définition l'entier

$$\deg_{\text{top}}(R) := \max_{S \in \mathbb{P}_K^1} \#(R^{-1}(S)) .$$

Lorsque la caractéristique de  $K$  est nulle, cet entier est égal à  $\deg(R)$ . Lorsque la caractéristique de  $K$  est  $p > 1$ , on peut alors écrire  $R$  de façon unique comme  $R(z) = Q(z^q)$ , où  $Q$  est une fraction rationnelle séparable et  $q \geq 1$  est une puissance de  $p$ . Dans ce cas on a  $\deg_{\text{top}}(R) = \deg(Q)$ . Notons que dans tous les cas  $\deg_{\text{top}}(R)$  divise  $\deg(R)$ .

On vérifie de plus que lorsque  $\deg(R) > 1$ , on a  $\deg_{\text{top}}(R) = 1$  si et seulement si la caractéristique de  $K$  est  $p > 1$ , et  $R$  est conjuguée à un itéré de l'automorphisme de Frobenius, c'est-à-dire  $R(z) = z^q$  avec  $q$  est une puissance de  $p$  pour un choix convenable de coordonnées.

*Degré local.* On définit le degré local de  $R$  en un point  $z_0 \in \mathbb{P}_K^1$  comme suit. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $\infty \notin \{z_0, R(z_0)\}$ . Dans ce cas, on écrit  $R(z_0 + h) = R(z_0) + ah^k + \mathcal{O}(h^{k+1})$  avec  $a \neq 0$ , et on pose  $\deg_R(z_0) := k$ . C'est un nombre entier strictement positif. On vérifie facilement que  $\deg_{R \circ R'} = \deg_R \circ R' \times \deg_{R'}$  pour tout couple  $R, R' \in K(z)$ , et donc que le degré local ne dépend pas des choix de coordonnées. On vérifie aussi que pour tout  $z \in \mathbb{P}_K^1$  on a  $\sum_{R(w)=z} \deg_R(w) = \deg(R)$ . On vérifie sans difficulté que le degré local de  $R$  en chaque point de  $\mathbb{P}_K^1$  est égal à l'entier  $\deg(R)/\deg_{\text{top}}(R)$ , avec au plus un nombre fini d'exceptions.

La proposition suivante permet d'étendre la définition du degré local à  $\mathbb{P}_K^1$ . Une définition géométrique est donnée en [R2, §2]. On donne ici une approche plus algébrique qui a l'avantage de se généraliser en toute dimension.

**Proposition-Définition 2.1.** *La fonction degré local  $\deg_R$  s'étend de manière unique en une fonction définie sur  $\mathbb{P}_K^1$  et à valeurs dans les entiers strictement positifs, vérifiant la propriété suivante :*

(\*) *pour tout ouvert fondamental  $V$ , toute composante connexe  $U$  de  $R^{-1}(V)$  et tout  $S_0 \in V$ , l'entier*

$$\sum_{R(S)=S_0, S \in U} \deg_R(S) ,$$

*est indépendant du choix du point  $S_0 \in V$ .*

On en déduit facilement le résultat suivant :

**Proposition 2.2.** *La fonction  $\deg_R$  est semi-continue supérieurement et prend ses valeurs dans  $[\deg(R)/\deg_{\text{top}}(R), \dots, \deg(R)]$ . De plus, pour tout  $S \in \mathbb{P}_K^1$  on a,*

$$\#(R^{-1}(S)) \leq \deg_{\text{top}}(R) , \text{ et } \sum_{R(S')=S} \deg_R(S') = \deg(R) . \quad (2.2)$$

*Enfin, pour tout couple de fractions rationnelles  $R, R'$  non nulles, on a  $\deg_{R \circ R'} = \deg_R \circ R' \times \deg_{R'}$ .*

Lorsque  $S$  est un point rationnel de  $\mathbb{P}_K^1$ , on peut calculer  $\deg_R(S)$  de la manière suivante. Quitte à faire un changement de coordonnées à la source et au but, on peut supposer que  $S = R(S) = S_{\text{can}}$ . Ce qui signifie que l'on peut écrire  $R = P/Q$  avec deux polynômes  $P, Q \in \mathcal{O}_K[z]$  dont les réductions  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  sont non nulles, et telles que la

fraction rationnelle  $\tilde{R} := \tilde{P}/\tilde{Q}$  soit non constante. Le degré local en  $S_{\text{can}}$  est alors le degré de  $\tilde{R}$ .

*Démonstration de la Proposition-Définition 2.1.* Notons tout d'abord que  $R^{-1}\{\mathcal{S}\}$  est un ensemble fini de cardinal  $\leq d$  pour tout  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1$ . Pour  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1$ , c'est clair. Sinon  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$  définit une norme sur  $K(z)$ , et donc sur le sous-corps  $R^*K(z) := \{\phi \circ R, \phi \in K(z)\}$  de  $K(z)$ . Le corps  $K(z)$  est une extension finie de degré au plus  $d$  de  $R^*K(z)$ . Donc  $\mathcal{S}|_{R^*K(z)}$  admet au plus  $d$  extensions à  $K(z)$ , voir [ZS]. Ceci est exactement dire que  $\mathcal{S}$  possède au plus  $d$  préimages.

On montre maintenant facilement l'unicité de la fonction  $\deg_R$ . Soit  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1$  et fixons  $U$  un ouvert fondamental contenant  $\mathcal{S}$ , tel que  $R : U \rightarrow R(U)$  soit propre et  $R^{-1}\{R(\mathcal{S})\} \cap U = \{\mathcal{S}\}$ . Un tel ouvert existe toujours car  $R(\mathcal{S})$  admet un nombre fini de préimages. On applique maintenant la relation (\*) pour tout point  $z_0 \in R(U) \cap \mathbb{P}_K^1$ , et l'on obtient  $\deg_R(\mathcal{S}) = \sum_{z \in U, R(z)=z_0} \deg_R(z)$ , ce qui détermine  $\deg_R$  de manière unique.

Pour tout  $z \in \mathbb{P}_K^1$ , notons  $\mathcal{O}_z$  l'anneau des germes de fonctions analytiques en  $z$ , et  $\mathfrak{m}_z$  l'idéal des fonctions qui s'annulent en  $z$ . Lorsque  $z \in \mathbb{P}_K^1$ ,  $\mathcal{O}_z$  est un anneau local d'idéal maximal  $\mathfrak{m}_z$ ; sinon  $\mathcal{O}_z$  est un corps et  $\mathfrak{m}_z = (0)$ . Dans tous les cas, on note  $\kappa(z)$  le corps  $\mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_z$ .

L'application analytique  $R$  est finie [Ber2, 3.1.10], donc pour tout  $z \in \mathbb{P}_K^1$ , l'anneau  $\mathcal{O}_z$  est un module de type fini sur  $\mathcal{O}_{R(z)}$  [Ber2, 3.1.6]. On définit alors

$$\deg_R(z) = \dim_{\kappa(R(z))}(\mathcal{O}_z/\mathfrak{m}_{R(z)}\mathcal{O}_z) .$$

C'est le nombre minimal de générateurs de  $\mathcal{O}_z$  vu comme  $\mathcal{O}_{R(z)}$ -module [Mat, Theorem 2.3].

Pour vérifier tout d'abord que la fonction ainsi définie coïncide bien avec le degré local sur  $\mathbb{P}_K^1$ , il suffit de traiter le cas où  $z = 0 = R(z)$ . Par un changement adéquat de coordonnées analytiques, on peut supposer  $R(z) = az^k + O(z^{k+1})$  avec  $a \neq 0$  et  $k \geq 1$ , et on veut montrer  $\deg_R(0) = k$ . Lorsque la caractéristique de  $K$  ne divise pas  $k$ , alors on peut se ramener à  $R(z) = z^k$ . Sinon la situation est plus compliquée mais dans de bonnes coordonnées, on peut toujours écrire  $R(z) = az^k + \sum_{j>k} a_j z^j$  avec  $|a_j| \rightarrow 0, \max\{|a|, |a_j|\} = 1$ . Il faut montrer que l'anneau de série convergente  $K\{z\}$  est un module libre sur  $K\{R(z)\}$  de rang  $k$ . Pour cela, on montre qu'il est engendré par la famille libre  $1, z, \dots, z^{k-1}$ . Le fait que cette famille soit libre est facile. Pour conclure, il suffit de trouver des  $f_i \in K\{z\}$  tels que  $z^k = f_0 \circ R + \dots + z^{k-1} f_{k-1} \circ R$ , ce qui se fait classiquement en résolvant l'équation successivement modulo  $z^n$  avec  $n$  croissant.

Pour vérifier (\*), on remarque que sous les hypothèses de l'énoncé, l'application analytique entre courbes analytiques  $R : U \rightarrow V$  est fermée (au sens de Berkovich) et non localement constante, et donc plate par [Ber2, 3.2.9]. On regarde maintenant le faisceau  $R_*\mathcal{O}_U$ , dont la fibre en  $w \in V$  est donnée par  $(R_*\mathcal{O}_U)_w \simeq \bigoplus_{z \in R^{-1}(w) \cap U} \mathcal{O}_z$ . Comme  $R$  est plat,  $(R_*\mathcal{O}_U)_w$  est libre sur  $\mathcal{O}_w$ . Or le faisceau  $R_*\mathcal{O}_U$  est cohérent [BGR, 9.4.4/3], [Ber2, 1.3.4], donc est lui-même localement libre. Il est en particulier de rang constant<sup>4</sup>, ce qui implique (\*).  $\square$

<sup>4</sup>le rang d'un faisceau  $\mathcal{F}$  en  $z$  est égal à  $\dim_{\kappa(z)} \mathcal{F}_z/\mathfrak{m}_z \mathcal{F}_z$

*Action sur les mesures positives.* Rappelons que pour toute fonction  $f : P_K^1 \rightarrow P_K^1$  continue et pour toute mesure (signée) de Radon  $\rho$  sur  $P_K^1$ , on définit l'image directe  $f_*\rho$  en imposant  $\int \phi d(f_*\rho) = \int (\phi \circ f) d\rho$  pour toute fonction mesurable. On a alors pour tout borélien  $E$ ,  $(f_*\rho)(E) = \rho(f^{-1}(E))$ . Si  $\rho$  est une mesure de probabilité, alors  $f_*\rho$  l'est encore.

On définit maintenant l'action d'une fraction rationnelle par image réciproque sur les mesures de Radon de manière analogue.

**Définition 2.3.** Pour toute fonction mesurable  $\phi : P_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose

$$(R_*\phi)(\mathcal{S}) := \sum_{R(\mathcal{S}')=\mathcal{S}} \deg_R(\mathcal{S}')\phi(\mathcal{S}') , \quad (2.3)$$

**Proposition 2.4.** Si  $\phi : P_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, alors  $R_*\phi$  l'est aussi, et  $R_*$  définit un opérateur linéaire sur l'espace des fonctions continues, vérifiant  $\sup |R_*\phi| \leq \deg(R) \times \sup |\phi|$ .

Cet opérateur induit donc par dualité une action sur les mesures de Radon, notée  $R^*$ , telle que pour toute fonction continue  $\phi : P_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  et toute mesure  $\rho$  définie sur  $P_K^1$ , on ait  $\int \phi d(R^*\rho) = \int (R_*\phi) d\rho$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer la première assertion. Fixons  $\varepsilon > 0$ , et  $\mathcal{S}_* \in P_K^1$ . Pour chaque  $\mathcal{S} \in R^{-1}(\mathcal{S}_*)$  choisissons un voisinage  $U_{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$  tel que  $\sup_{U_{\mathcal{S}}} |\phi - \phi(\mathcal{S})| \leq \varepsilon$ . Choisissons de plus un voisinage  $U_*$  de  $\mathcal{S}_*$  tel que  $R^{-1}(U_*) \subset \bigcup_{\mathcal{S} \in R^{-1}(U_*)} U_{\mathcal{S}}$  et l'application restreinte  $R : U_{\mathcal{S}} \rightarrow U_*$  est de degré  $\deg_R(\mathcal{S})$ . On obtient alors

$$\sup_{U_*} |R_*\phi - R_*\phi(\mathcal{S}_*)| \leq \sum_{\mathcal{S} \in R^{-1}\{\mathcal{S}_*\}} \deg_R(\mathcal{S}) \times \varepsilon \leq \deg(R) \times \varepsilon .$$

□

Indiquons sans preuve quelques propriétés de ces actions :

**Proposition 2.5.** Pour toute fraction rationnelle et pour toute mesure de Radon, on a  $R_*R^*\rho = d\rho$ . Pour tout couple de fractions rationnelles  $R_1, R_2$ , on a :  $(R_1 \circ R_2)_* = (R_1)_* \circ (R_2)_*$ , et  $(R_1 \circ R_2)^* = (R_2)^* \circ (R_1)^*$ .

**Proposition 2.6.** Si  $\rho$  est une mesure de probabilité, alors  $R^*\rho$  est une mesure positive de masse  $\deg(R)$  dont le support topologique est égal à la préimage par  $R$  du support topologique de  $\rho$ . Enfin, pour tout  $\mathcal{S} \in P_K^1$  on a

$$(R^*\rho)\{\mathcal{S}\} = \deg_R(\mathcal{S}) \times \rho\{R(\mathcal{S})\} .$$

*Démonstration.* Il est clair que  $R^*$  préserve la positivité des mesures. L'image de la fonction constante égale à 1 par  $R_*$  est la fonction constante égale à  $\deg(R)$  par (2.2). Donc la masse des mesures est multipliée par  $\deg(R)$  sous l'action de  $R^*$ . Le fait que pour une mesure  $\rho$  le support topologique de  $R^*\rho$  soit la préimage par  $R$  du support topologique de  $\rho$ , est une conséquence immédiate du fait que pour chaque fonction continue positive  $\phi : P_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  le support de la fonction  $R_*\phi$  est égal à l'image par  $R$  du support de  $\phi$ .

Pour montrer la dernière égalité, soient  $\varepsilon > 0$  un réel positif et  $V'$  un ouvert fondamental contenant  $R(\mathcal{S})$  tel que  $|\rho\{R(\mathcal{S})\} - \rho(V')| \leq \varepsilon$ , et tel que la composante

connexe  $V$  de  $R^{-1}(V')$  contenant  $\mathcal{S}$  vérifie  $|(R^*\rho)\{\mathcal{S}\} - (R^*\rho)(V)| \leq \varepsilon$  et  $R^{-1}\{R(\mathcal{S})\} \cap V = \{\mathcal{S}\}$ . En particulier, pour tout  $\mathcal{S}'_0 \in V'$  on a  $\sum_{\mathcal{S}_0 \in R^{-1}(\mathcal{S}'_0) \cap V} \deg(\mathcal{S}_0) = \deg_R(\mathcal{S})$  (Proposition-Définition 2.1).

Comme  $\mathbb{P}_K^1$  est un espace normal, il existe une fonction continue  $\phi$  à valeurs dans  $[0, 1]$  supportée dans  $V$  et telle que  $\phi(\mathcal{S}) = 1$ . Alors la fonction  $R_*\phi$  est à valeurs dans  $[0, \deg_R(\mathcal{S})]$ , étant nulle en dehors de  $V'$  et égale à  $\deg_R(\mathcal{S})$  en  $R(\mathcal{S})$ . on a donc

$$|\deg_R(\mathcal{S}) \rho\{R(\mathcal{S})\} - \int (R_*\phi) d\rho| \leq \deg_R(\mathcal{S}) \times \varepsilon, \text{ et } |(R^*\rho)\{\mathcal{S}\} - \int \phi d(R^*\rho)| \leq \varepsilon.$$

On tire alors de l'égalité  $\int (R_*\phi) d\rho = \int \phi d(R^*\rho)$ , que

$$|(R^*\rho)\{\mathcal{S}\} - \deg_R(\mathcal{S}) \rho\{R(\mathcal{S})\}| \leq (\deg_R(\mathcal{S}) + 1) \times \varepsilon.$$

On conclut en faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

**2.3. Théorie de Fatou et Julia.** Fixons une fraction rationnelle  $R$  à coefficients dans  $K$  et de degré au moins 2. Dans le cas complexe, il est plus commode de définir en premier lieu l'ensemble de Fatou à l'aide de propriétés d'équicontinuité. Dans le cas non archimédien il est plus convenable de procéder de manière légèrement différente. On va donc tout d'abord rappeler quelques faits concernant les points exceptionnels.

**Définition 2.7.** Soit  $R \in K(z)$  une fraction rationnelle de degré au moins 2. Un point  $z \in \mathbb{P}_K^1$  est dit *exceptionnel* si l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}\{z\}$  est fini. On note  $E_R \subset \mathbb{P}_K^1$  l'ensemble des points exceptionnels.

Lorsque  $\deg_{\text{top}}(R) = 1$  la caractéristique de  $K$  est strictement positive et  $R$  est conjuguée à un itéré de l'automorphisme de Frobenius. L'ensemble exceptionnel est alors infini dénombrable et, après un changement de coordonnées convenable, il est égal à  $\mathbb{P}^1(\bar{K})$  où  $\bar{K}$  est la fermeture algébrique dans  $K$  du corps premier de  $K$ .

Lorsque  $\deg_{\text{top}}(R) > 1$  on montre que l'ensemble exceptionnel contient au plus deux éléments. Dans le cas où il contient deux points,  $R$  est conjuguée à  $z^{\pm \deg(R)} \in K(z)$ . Dans le cas où l'ensemble exceptionnel contient un seul élément, la fraction rationnelle  $R$  est un polynôme dans toute coordonnée telle que  $\infty$  est l'unique point exceptionnel de  $R$ .

**Définition 2.8.** Soit  $R \in K(z)$  une fraction rationnelle de degré au moins 2. L'ensemble de Julia de  $R$ , noté  $J_R$ , est l'ensemble des points  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1$  tels que pour tout voisinage  $U$  de  $\mathcal{S}$  contenu dans  $\mathbb{P}_K^1 \setminus E_R$ , on a  $\bigcup_{n \geq 0} R^n(U) = \mathbb{P}_K^1 \setminus E_R$ . Le complémentaire de l'ensemble de Julia est l'ensemble de Fatou, noté  $F_R$ .

Rappelons qu'un ensemble  $J$  est dit *totalelement invariant* si  $R^{-1}(J) \subset J$ . Les propriétés suivantes sont démontrées dans [R7].

**Proposition 2.9.** L'ensemble de Julia  $J_R$  est compact, non vide, totalelement invariant, et pour tout  $n \geq 1$  on a  $J_{R^n} = J_R$ . De plus  $J_R$  est caractérisé comme le plus petit sous-ensemble compact non vide de  $\mathbb{P}_K^1$  qui est disjoint de l'ensemble exceptionnel de  $R$  et qui est totalelement invariant par  $R$ . De même,  $F_R$  est un ouvert totalelement invariant dont l'intersection avec  $\mathbb{P}_K^1$  est non vide.

*Bonne réduction.* Un exemple important d'applications rationnelles a été mis en exergue par Morton et Silverman [MS].

**Définition 2.10.** Une fraction rationnelle  $R \in K(z)$  est dite avoir *bonne réduction*, si on peut l'écrire  $R = P/Q$  avec deux polynômes  $P, Q \in \mathcal{O}_K[z]$ , dont les réductions  $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \tilde{K}[\zeta]$  sont non nulles et telles que  $\tilde{R} := \tilde{P}/\tilde{Q} \in \tilde{K}(\zeta)$  ait même degré que  $R$ .

On montre alors la proposition suivante.

**Proposition 2.11** ([R4], Théorème 4). *Si  $R$  a bonne réduction, le point  $\mathcal{S}_{\text{can}} \in \mathbb{H}_K^{|K^*|}$  est totalement invariant, et  $J_R = \{\mathcal{S}_{\text{can}}\}$ .*

*Réciproquement, si  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$  est tel que l'ensemble  $\bigcup_{n \geq 0} R^{-n}(\mathcal{S})$  est fini, alors  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K^{|K^*|}$  et ce point est totalement invariant. En conjuguant  $R$  par un automorphisme de Möbius adéquat, on peut de plus supposer que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$  et dans ce cas  $R$  a bonne réduction.*

On utilisera le lemme suivant dans la preuve du Théorème E.

**Lemme 2.12.** *Pour une fraction rationnelle  $R$  de degré au moins deux, il y a deux cas : soit  $R$  est conjuguée à une fraction rationnelle ayant bonne réduction, soit il existe un entier positif  $n$  tel que pour tout  $\mathcal{S} \in J_R$  on ait*

$$\deg_{R^n}(\mathcal{S}) < \deg(R)^n .$$

*Démonstration.* Si l'ensemble exceptionnel possède au moins deux points, alors  $R$  est conjuguée à une fraction rationnelle ayant bonne réduction. Lorsque l'ensemble exceptionnel possède un unique élément, après un changement de coordonnées on se ramène au cas où  $R$  est un polynôme de la forme

$$R(z) = \rho(z^D + a_{D-1}z^{D-1} + \dots + a_0) ,$$

avec  $|\rho| \geq 1$ ,  $D \geq 2$ ,  $\max\{|a_j|, j \in \{0, \dots, D-1\}\} = 1$ , voir [R1, Proposition 6.7]. Lorsque  $|\rho| = 1$  la fraction rationnelle  $R$  a bonne réduction, et lorsque  $|\rho| > 1$  on vérifie que  $J_R$  est contenu dans la réunion des boules ouvertes de  $\mathbb{P}_K^1$  associées aux classes résiduelles des zéros du polynôme  $\zeta^D + \tilde{a}_{D-1}\zeta^{D-1} + \dots + \tilde{a}_0 \in \tilde{K}[\zeta]$ , et qu'on a  $\deg_R < \deg(R)$  sur cet ensemble. L'assertion du lemme est alors vérifiée avec  $n = 1$  dans ce cas.

Supposons maintenant que l'ensemble exceptionnel de  $R$  est vide. Il suffit de montrer alors que si pour chaque  $j \geq 1$  l'ensemble

$$F_j := \{\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1, \deg_{R^j}(\mathcal{S}) = \deg(R)^j\} ,$$

est non vide, alors  $R$  est conjuguée à une fraction rationnelle ayant bonne réduction. Notons que  $F_j = F_1 \cap R(F_1) \cap \dots \cap R^{j-1}(F_1)$ , et que  $F_j$  est compact et décroissant avec  $j$ . Il découle de la démonstration de [R3, Lemme 7.4] que  $F_j$  est connexe lorsqu'il est non vide. Par conséquent, si pour tout  $j \geq 1$  l'ensemble  $F_j$  est non vide, alors l'ensemble

$$F := \bigcap_{j \geq 1} F_j ,$$

est compact, non vide et connexe. De plus il est invariant par  $R$ . Par conséquent  $R$  possède un point fixe  $\mathcal{S}$  dans  $F$ , voir [FJ] ou la « propriété de point fixe » dans [R5].

Comme par hypothèse l'ensemble exceptionnel est vide, on a  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$  et la Proposition 2.11 implique que  $R$  est conjuguée à une fraction rationnelle ayant bonne réduction.  $\square$

*Dynamique sur l'ensemble de Fatou.* Comme dans le cas complexe, la dynamique dans l'ensemble de Fatou est très régulière. On en donne ici une très brève description, et on renvoie à [R1, R2, R5, R7] pour plus de détails. Rappelons tout d'abord quelques définitions. Fixons une fraction rationnelle  $R \in K(z)$  de degré au moins deux.

**Définition 2.13.** Un point  $z_0 \in \mathbb{P}_K^1$  fixé par  $R$  est dit *attractif* (resp. *répulsif*, ou *indifférent*) si localement  $R(z_0 + h) = z_0 + \lambda h + \mathcal{O}(h^2)$  avec  $|\lambda| < 1$  (resp.  $|\lambda| > 1$ , ou  $|\lambda| = 1$ ). Un point  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$  fixé par  $R$  est dit *répulsif* si  $\deg_R(\mathcal{S}) \geq 2$ . Sinon il est dit *indifférent*.

On définit de même la nature d'un point périodique de période  $N$ , c'est la nature de ce point vu comme point fixe de  $R^N$ .

Il est facile de voir que tout point périodique attractif et que tout point périodique indifférent dans  $\mathbb{P}_K^1$  appartient à l'ensemble de Fatou. Par contre, un point fixe  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$  indifférent peut être dans l'ensemble de Fatou ou dans l'ensemble de Julia. D'autre part, tout point périodique répulsif (dans  $\mathbb{P}_K^1$  ou dans  $\mathbb{H}_K$ ) est dans l'ensemble de Julia, voir [R5, Proposition 5.1] ou [R7].

L'image par  $R$  d'une composante connexe de l'ensemble de Fatou est aussi une composante connexe de l'ensemble de Fatou. La fraction rationnelle induit alors une action sur les composantes connexes de l'ensemble de Fatou. On dira qu'une composante connexe de l'ensemble de Fatou est *errante* si son orbite sous cette action est infinie, et on dira qu'elle est *prépériodique* si son orbite est finie.

Le *bassin d'attraction* d'un point périodique  $\mathcal{S}_0$  de période  $n \geq 1$ , est par définition l'ensemble des points dans  $\mathbb{P}_K^1$  qui convergent vers  $\mathcal{S}_0$  sous l'action de  $R^n$ . Lorsque  $\mathcal{S}_0$  est attractif, cet ensemble est ouvert et contient  $\mathcal{S}_0$  dans son intérieur. Dans ce cas la composante connexe du bassin d'attraction contenant  $\mathcal{S}_0$  sera appelée *bassin d'attraction immédiat*.

Le *domaine de quasi-périodicité*  $\mathcal{E}_R$  de  $R$  est l'ensemble des points dans  $\mathbb{P}_K^1$  possédant un voisinage sur lequel une sous-suite des itérées de  $R$  converge uniformément vers l'identité. Par définition l'ensemble  $\mathcal{E}_R$  est ouvert et invariant par  $R$ . De plus on montre qu'il est contenu dans l'ensemble de Fatou.

Nous aurons besoin du résultat suivant dans la démonstration du Théorème B.

**Lemme 2.14.** *Si la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle, alors l'ensemble de quasi-périodicité d'une fraction rationnelle  $R$  de degré au moins deux est vide.*

*Démonstration.* Supposons par contradiction que le domaine de quasi-périodicité ne soit pas vide. Après un changement de coordonnée on se ramène au cas où il existe une suite d'itérés de  $R$  qui convergent uniformément vers l'identité sur  $\mathcal{O}_K$ . Il existe alors une suite strictement croissante d'entiers  $\{n_j\}_{j \geq 0}$  telle que pour tout  $j \geq 0$ ,

$$\sup\{|R^{n_j}(z) - z|, z \in \mathcal{O}_K\} < 1.$$



Notons en particulier que  $R^{n_j}$  induit une bijection de  $\mathcal{O}_K$ . Par conséquent, pour chaque  $j, j' \geq 0$ , on a

$$\sup\{|R^{n_{j'}+n_j}(z) - z|, z \in \mathcal{O}_K\} \leq \max\{\sup\{|R^{n_j}(z) - z|, z \in \mathcal{O}_K\}, \sup\{|R^{n_{j'}}(z) - z|, z \in \mathcal{O}_K\}\}.$$

On conclut qu'il existe une suite d'itérés de  $R^{n_0}$  qui converge uniformément vers l'identité sur  $\mathcal{O}_K$ .

Comme le degré de  $R^{n_0}$  est au moins deux, il existe une classe résiduelle ne contenant aucun point fixe de  $R^{n_0}$ . Après un changement de coordonnée fixant  $\mathcal{O}_K$ , on se ramène au cas où  $\mathfrak{m}_K$  ne contient aucun point fixe de  $R^{n_0}$ . Soit  $T$  la fraction rationnelle donnée par  $T(z) = R^{n_0}(z) - z$ . Alors  $T$  ne s'annule pas sur  $\mathfrak{m}_K$ , et satisfait  $\sup\{|T(z)|, z \in \mathfrak{m}_K\} < 1$ . Par conséquent il existe  $a \in \mathfrak{m}_K$  tel que pour chaque  $z \in \mathfrak{m}_K$  on a

$$T(z) \in \{w \in K, |T(w) - a| < |a|\}.$$

Ceci implique que pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $z \in \mathfrak{m}_K$  on a

$$|R^{nn_0}(z) - z - na| = |T(z) + T(R^{n_0}(z)) + \dots + T(R^{(n-1)n_0}(z)) - na| < |a|.$$

Comme par hypothèse la caractéristique résiduelle de  $K$  est nulle, on a  $|n| = 1$  et donc  $|R^{nn_0}(z) - z| = |a|$ . On obtient alors une contradiction avec le fait qu'une suite d'itérés de  $R^{n_0}$  converge vers l'identité sur  $\mathfrak{m}_K$ .  $\square$

Lorsque  $K = \mathbb{C}_p$  le résultat suivant est exactement [R2, Proposition 5.6]. La démonstration donnée dans op.cit. s'applique sans changement dans ce cadre plus général.

**Théorème 2.15.** *Soit  $K$  un corps de caractéristique zéro et de caractéristique résiduelle  $p > 0$ , et soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$  de degré au moins deux. Alors pour chaque composante connexe  $Y$  de  $\mathcal{E}_R$  il existe un entier positif  $n$  tel que  $R^n(Y) = Y$  ainsi qu'une action continue*

$$T : \mathbb{Z}_p \times Y \rightarrow Y \tag{2.4}$$

$$(w, y) \mapsto T^w(y), \tag{2.5}$$

telle que pour chaque entier positif  $m$  on ait  $T^m = R^{nm}$ . Si de plus  $\infty \notin Y$ , alors il existe une fonction holomorphe non constante  $T_* : Y \rightarrow K$  telle que pour tout  $w_0 \in \mathbb{Z}_p$  la fonction holomorphe  $\frac{T^w - T^{w_0}}{w - w_0}$  converge vers  $T_*$  lorsque  $w \in \mathbb{Z}_p \setminus \{w_0\}$  converge vers  $w_0$ .

Nous utiliserons la proposition suivante dans la démonstration du Théorème C.

**Proposition 2.16.** *Soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$  et de degré au moins deux, et  $U$  une composante connexe de l'ensemble de Fatou  $U$  fixée par  $R$ . Si  $U$  n'est pas un bassin d'attraction immédiat d'un point périodique attractif, alors  $R$  est injective sur  $U$ .*

Lorsque  $K = \mathbb{C}_p$  ce résultat est une conséquence immédiate du « théorème de classification » dans [R2]. Pour un corps de base  $K$  quelconque, ce résultat est démontré dans l'article en préparation [R7]. En voici une esquisse de démonstration.

*Esquisse de démonstration.* Si  $U$  n'est pas un bassin d'attraction immédiat d'un point périodique attractif, la « propriété de point fixe » [R5, §8] implique que  $U$  contient un point fixe indifférent  $\mathcal{S}$ . On regarde alors l'ouvert connexe maximal  $U'$  contenant  $\mathcal{S}$  sur lequel le degré local est constant égal à 1. On montre que  $U'$  est un ouvert fondamental en suivant [R3, Proposition 2.9]. On peut alors adapter [R3, Lemme 5.5] pour voir qu'il existe un ouvert fondamental  $U''$  contenant  $\mathcal{S}$  et contenu dans  $U'$  dont les points du bord sont périodiques répulsifs. Ceci implique l'invariance de  $U''$ , et donc le fait que  $U''$  est inclus dans l'ensemble de Fatou. Comme les points répulsifs sont dans l'ensemble de Julia, on a finalement  $U'' = U$ . De la Proposition 2.1, et du fait que  $\deg_R = 1$  sur  $U$ , on en déduit que  $R$  est injective sur  $U$ .  $\square$

**2.4. Théorie du potentiel  $P_K^1$ .** Plusieurs approches [BR2, FJ, Th] existent pour construire un analogue de la théorie du potentiel complexe sur la droite projective au sens de Berkovich. La plus aboutie est due à Thuillier et s'applique sur n'importe quelle courbe lisse  $K$ -analytique. Nous ne décrivons cependant ici que les éléments qui nous seront strictement nécessaires par la suite en suivant [FJ, §7] et [FR2, §4].

Munissons  $P_K^1$  de la tribu des boréliens associée à sa topologie compacte. On note  $\mathcal{M}^+$  l'ensemble des mesures boréliennes positives finies, supportées dans  $P_K^1$ . On désigne par  $\mathcal{M}$  l'espace vectoriel des mesures réelles signées, différences de mesures dans  $\mathcal{M}^+$ . Toute suite de mesures de probabilité dans  $\mathcal{M}^+$  admet une sous-suite convergente pour la topologie de la convergence vague. Notons que toute mesure dans  $\mathcal{M}$  est de Radon et est donc représentée par une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues de  $P_K^1$  (voir par exemple [FJ, Proposition 7.14]). Enfin on montre que bien que  $P_K^1$  muni de la topologie compacte ne soit pas métrisable en général, le support de toute mesure dans  $\mathcal{M}$  est métrisable [FJ, Lemma 7.15].

Nous allons maintenant définir un espace fonctionnel  $\mathcal{P}$  et un opérateur  $\Delta$  défini sur  $\mathcal{P}$  et à valeurs dans  $\mathcal{M}$ . Pour cela, fixons un point base  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{H}_K$ . Notons que pour tout  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$ , la fonction  $\mathcal{S}' \mapsto \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0}$  est non négative et majorée par  $d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_0)$ . Etant donnée une mesure borélienne  $\rho \in \mathcal{M}$ , on peut donc définir  $\hat{g}_\rho : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\hat{g}_\rho(\mathcal{S}) := -\rho(P_K^1) - \int_{P_K^1} \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0} d\rho(\mathcal{S}'), \quad (2.6)$$

et on l'appelle le *potentiel de  $\rho$  basé en  $\mathcal{S}_0$* . On a  $\hat{g}_\rho(\mathcal{S}_0) = -\rho(P_K^1)$  et par construction  $\hat{g}_{[\mathcal{S}_0]}$  est la fonction constante égale à  $-1$  sur tout  $P_K^1$ . Plus généralement,  $\hat{g}_{[\mathcal{S}']}(\mathcal{S}) = -1 - \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0}$ .

On désigne par  $\mathcal{P}$  l'ensemble de tous les potentiels. C'est un espace vectoriel qui contient toutes les fonctions définies sur  $\mathbb{H}_K$  et à valeurs réelles de la forme  $\mathcal{S} \mapsto \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_0}$ . Il résulte de [FJ, Theorem 7.50] que l'application  $\rho \mapsto \hat{g}_\rho$  induit une bijection entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$ . On peut donc poser

$$\Delta \hat{g}_\rho := \rho - \rho(P_K^1) \times [\mathcal{S}_0].$$

Ceci définit une application linéaire  $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  que l'on appelle *le Laplacien*. On vérifie que cet opérateur ne dépend pas du choix du point base ainsi que la classe de fonctions  $\mathcal{P}$ , voir [FR2, Proposition 4.1]. On a de plus  $\Delta g = 0$  si et seulement si  $g$  est constante.

Par construction, pour tout  $g \in \mathcal{P}$  on a  $\Delta g(\mathbb{P}_K^1) = 0$ . Réciproquement, toute mesure vérifiant  $\rho(\mathbb{P}_K^1) = 0$  est le Laplacien d'une fonction de  $\mathcal{P}$ . Dans toute la suite, on appellera *potentiel* d'une mesure borélienne  $\rho$  toute fonction  $g \in \mathcal{P}$  telle que  $\rho = \Delta g$ . Notons que :

$$\Delta\langle \cdot, \mathcal{S} \rangle_{\mathcal{S}_0} = [\mathcal{S}_0] - [\mathcal{S}] , \text{ et } \Delta \log \sup\{\cdot, \mathcal{S}\} = [\mathcal{S}] - [\infty] .$$

De plus, pour tout potentiel  $g : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  et toute fraction rationnelle non constante  $R$ , on a  $R^*(\Delta g) = \Delta(g \circ R)$  et  $R_*\Delta(g) = \Delta(R_*g)$ .

Soit  $\mathcal{P}_+$  l'ensemble des fonctions  $g \in \mathcal{P}$  telles que  $[\mathcal{S}_{\text{can}}] + \Delta g$  soit une mesure positive. L'opérateur  $\Delta$  possède des propriétés de continuité remarquables sur  $\mathcal{P}_+$  qui sont analogues aux propriétés de continuité des fonctions sous-harmoniques en analyse complexe, et que nous allons maintenant détailler.

On vérifie tout d'abord que toute fonction dans  $\mathcal{P}_+$  est continue, convexe pour la métrique  $d_{\mathbb{H}_K}$  et décroissante sur tout segment  $[\mathcal{S}_{\text{can}}, \mathcal{S}]$ . Une telle fonction s'étend donc de manière unique à  $\mathbb{P}_K^1$  en restant continue sur tout segment. Cette extension est semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{P}_K^1$  pour la topologie compacte.

**Proposition 2.17** ([FJ], Theorem 7.64). *L'espace  $\mathcal{P}_+$  est convexe et fermé pour la topologie de la convergence simple de  $\mathbb{H}_K$ . De plus, l'opérateur induit  $(\Delta + [\mathcal{S}_{\text{can}}]) : \mathcal{P}_+ \rightarrow \mathcal{M}_+$  est continu si  $\mathcal{M}_+$  est muni de la topologie de la convergence vague des mesures.*

Le fait suivant est un résultat de base en théorie du potentiel [Hö, Théorème 1.6.13].

**Proposition 2.18** (Lemme de Hartogs). *Soit  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  une suite de potentiels dans  $\mathcal{P}_+$  telle que pour chaque  $n \geq 1$  on ait  $g_n \leq 0$ . Alors soit cette suite converge uniformément sur  $\mathbb{P}_K^1$  vers la fonction constante égale à  $-\infty$ ; soit il existe une sous-suite  $\{g_{n_k}\}_{k \geq 1}$  convergeant ponctuellement sur  $\mathbb{H}_K$  vers un potentiel  $g$  dans  $\mathcal{P}_+$ . Dans ce dernier cas, pour toute fonction continue  $\varphi$  et toute partie compacte  $C$  de  $\mathbb{P}_K^1$ , on a*

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \left( \sup_C (g_{n_k} - \varphi) \right) \leq \sup_C (g - \varphi) .$$

*Démonstration.* Pour chaque entier  $n \geq 1$  on pose  $\rho_n := [\mathcal{S}_{\text{can}}] + \Delta g_n$ . C'est une mesure positive de masse 1. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que  $\rho_n$  converge vers une mesure de probabilité  $\rho$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Supposons tout d'abord que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \{g_n(\mathcal{S}_{\text{can}}), n \geq 1\} = -\infty$ . Comme  $g_n$  est décroissante sur tout segment partant de  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ , on a  $g_n \rightarrow -\infty$  uniformément.

Supposons maintenant que  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \{g_n(\mathcal{S}_{\text{can}}), n \geq 1\} > -\infty$ . Quitte à remplacer  $\{g_n\}_{n \geq 1}$  par  $\{g_n - g_n(\mathcal{S}_{\text{can}}) - 1\}_{n \geq 1}$  et à prendre une sous-suite, on peut supposer que pour chaque  $n \geq 1$  on a  $g_n(\mathcal{S}_{\text{can}}) = -1$ . À nouveau par décroissance des  $g_n$ , on a  $g_n \leq -1$  partout. Soit  $\hat{g}_{\rho_n}$  définie par (2.6) lorsque le point base  $\mathcal{S}_0$  est égal à  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ . Par construction,  $\Delta \hat{g}_{\rho_n} = \Delta g_n$  et ces deux fonctions sont égales en  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ . Elles sont donc égales partout. Par convergence dominée, on a  $\hat{g}_{\rho_n} \rightarrow \hat{g}_\rho$  ponctuellement sur  $\mathbb{H}_K$ , et par conséquent on a  $g_n \rightarrow \hat{g}_\rho$  ponctuellement.

Pour montrer la dernière assertion de la proposition, soit  $\{\mathcal{T}_m\}_{m \geq 1} \subset \mathbb{H}_K$  une suite croissante d'arbres fermés finis dont l'adhérence de la réunion contient le support topologique de  $\rho$ , voir [FJ, Lemma 7.15]. Quitte à agrandir les  $\mathcal{T}_m$ , on suppose que tous ces arbres contiennent  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ . La suite de mesures de probabilité  $\{\rho_{\mathcal{T}_m}\}_{m \geq 1}$  converge vers  $\rho$ , et  $g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}$  décroît vers  $g$  ponctuellement.

D'autre part, pour un entier  $m \geq 1$  fixé, la fonction  $g_n|_{\mathcal{T}_m}$  est décroissante sur  $\mathcal{T}_m$  et converge ponctuellement vers la fonction continue  $g|_{\mathcal{T}_m}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Par conséquent la convergence est uniforme sur  $\mathcal{T}_m$ . On en déduit que  $g_n \circ \pi_{\mathcal{T}_m} \rightarrow g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}$  uniformément sur  $P_K^1$ . On a donc pour tout  $m \geq 1$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_C (g_n - \varphi) \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sup_C (g_n \circ \pi_{\mathcal{T}_m} - \varphi) \right) = \sup_C (g \circ \pi_{\mathcal{T}_m} - \varphi) .$$

Pour chaque  $m \geq 1$  prenons  $\mathcal{S}_m \in C$  tel que

$$(g \circ \pi_{\mathcal{T}_m} - \varphi)(\mathcal{S}_m) = \sup_C (g \circ \pi_{\mathcal{T}_m} - \varphi) .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que  $\{\mathcal{S}_m\}_{m \geq 1}$  converge vers un certain point  $\mathcal{S}$ . Etant donné  $\varepsilon > 0$  on choisit un ouvert fondamental  $U$  contenant  $\mathcal{S}$  tel que  $\sup_U |\varphi - \varphi(\mathcal{S})| \leq \varepsilon$ . Notons  $\mathcal{S}_0$  le point du bord de  $U$  le plus proche de  $\mathcal{S}_{\text{can}}$  (si  $\mathcal{S}_{\text{can}} \in U$ , on pose  $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}_{\text{can}}$ ). Comme les fonctions  $g, g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}$  sont décroissantes sur tout segment partant de  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ , pour  $m \geq 1$  assez grand tel que  $g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{S}_0) \leq g(\mathcal{S}_0) + \varepsilon$  et  $\mathcal{S}_m \in U$ , on a,

$$\begin{aligned} \sup_C (g - \varphi) &\geq \sup_{U \cap C} g - \varphi(\mathcal{S}_0) - \varepsilon = g(\mathcal{S}_0) - \varphi(\mathcal{S}_0) - \varepsilon \geq \\ &\geq g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{S}_0) - \varphi(\mathcal{S}_0) - 2\varepsilon \geq g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{S}_m) - \varphi(\mathcal{S}_0) - 2\varepsilon \geq \\ &\geq g \circ \pi_{\mathcal{T}_m}(\mathcal{S}_m) - \varphi(\mathcal{S}_m) - 3\varepsilon = \sup_C (g \circ \pi_{\mathcal{T}_m} - \varphi) - 3\varepsilon . \end{aligned}$$

Donc  $\sup_C (g - \varphi) \geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} (\sup_C (g \circ \pi_{\mathcal{T}_m} - \varphi))$ . Ce qui termine la preuve.  $\square$

### 3. LA MESURE D'ÉQUILIBRE

Fixons une fraction rationnelle  $R$  de degré au moins 2.

#### 3.1. Construction de la mesure.

**Proposition-Définition 3.1.** *Pour tout élément  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$ , la suite de mesures de probabilité  $\{\deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}]\}_{n \geq 0}$  converge vaguement vers une mesure  $\rho_R$  indépendante du choix de  $\mathcal{S}$ . On appellera cette mesure la mesure d'équilibre de  $R$ .*

*Démonstration.* Prenons  $\mathcal{S}$  un point arbitraire de  $\mathbb{H}_K$ . La masse de la mesure  $R^*[\mathcal{S}]$  est égale au degré de  $R$ , donc nous pouvons écrire  $\deg(R)^{-1} R^*[\mathcal{S}] = [\mathcal{S}] + \Delta g$ , où  $g : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  est un potentiel. La mesure  $R^*[\mathcal{S}]$  est supportée sur le sous-ensemble fini  $R^{-1}(\mathcal{S})$  de  $\mathbb{H}_K$ . L'enveloppe convexe de l'ensemble  $\text{supp } R^*[\mathcal{S}] \cup \{\mathcal{S}\}$  est donc un arbre fini  $\mathcal{T}$  dont les bouts sont situés dans  $\mathbb{H}_K$ . Le potentiel  $g$  est localement constant en dehors de  $\mathcal{T}$  et est borné sur  $\mathcal{T}$ , il est donc borné sur  $\mathbb{H}_K$  tout entier. On obtient donc pour tout entier  $n$  :

$$\deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}] = [\mathcal{S}] + \Delta g_n , \text{ avec } g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g \circ R^k}{\deg(R)^k} .$$

La suite  $\{g_n\}_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $\mathbb{H}_K$  vers une fonction continue  $g_\infty$ , donc  $\deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}]$  converge vaguement vers une mesure  $\rho_R$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Si l'on choisit un autre élément  $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_K$ , on peut écrire  $[\mathcal{S}'] = [\mathcal{S}] + \Delta h$  avec  $h : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  bornée. De l'équation

$$\deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}'] = \deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}] + \Delta(\deg(R)^{-n} h \circ R^n),$$

on tire  $\deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}'] \rightarrow \rho_R$ .  $\square$

**Remarque 3.2.** L'argument montre que plus généralement pour toute mesure  $\rho$  vérifiant  $\rho = [\mathcal{S}] + \Delta h$ , avec  $h$  bornée et  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$ , on a  $\deg(R)^{-n} R^{n*}\rho \rightarrow \rho_R$ . Nous verrons à la section suivante comment étendre ce type de résultat dans certains cas où la fonction  $h$  n'est plus bornée, par exemple lorsque  $\rho$  est atomique et supportée sur un point non exceptionnel dans  $\mathbb{P}_K^1$ .

L'opérateur  $\deg(R)^{-1} R^*$  est continu et préserve l'espace des mesures de probabilités. Il est donc clair que  $\rho_R$  est une mesure de probabilité qui vérifie l'équation d'invariance :

$$R^* \rho_R = \deg(R) \rho_R. \quad (3.1)$$

En particulier, c'est une mesure invariante  $R_* \rho_R = \rho_R$ . L'équation d'invariance (3.1), combinée à la Proposition 2.6 donne de plus pour tous  $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathbb{P}_K^1$  tels que  $R(\mathcal{S}') = \mathcal{S}$  :

$$\rho_R\{\mathcal{S}'\} = \frac{\deg_R(\mathcal{S}')}{\deg(R)} \rho_R\{\mathcal{S}\}. \quad (3.2)$$

**Proposition 3.3.** *Il existe  $\alpha \in (0, 1]$  tel que pour chaque  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$ , tout potentiel  $g_0 : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant  $\rho_R = [\mathcal{S}] + \Delta g_0$  est Hölder d'exposant  $\alpha$  par rapport à la distance  $d_{\mathbb{P}_K^1}$ . Plus précisément, on peut trouver une constante  $C > 0$  telle que pour tous  $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \in \mathbb{H}_K$ , on ait*

$$|g_0(\mathcal{S}') - g_0(\mathcal{S}'')| \leq C d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', \mathcal{S}'')^\alpha.$$

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{P}_K^1$  et  $r > 0$ , on a

$$\rho_R(B(z, r)) \leq C r^\alpha,$$

où  $B(z, r)$  désigne l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{P}_K^1$  de la boule  $\{w \in K, d_{\mathbb{P}_K^1}(z, w) \leq r\}$ .

En particulier,  $\rho_R$  ne charge pas les points de  $\mathbb{P}_K^1$ .

En dimension supérieure, une version de ce résultat a été démontrée dans [KS]. Notons que ce fait est classique sur le corps des complexes, et reste valable en dimension supérieure [Sib, §1.7] ou [DS2]. La preuve que nous donnons ici suit celles de [DS1, Théorème 3.7.1], et [Gu, Proposition 1.2].

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{S}_{\text{can}}$  le point de  $\mathbb{H}_K^{|K^*|}$  associé à la boule unité de  $K$ . Pour chaque  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$ , tout potentiel  $g_1$  satisfaisant  $\Delta g_1 = [\mathcal{S}_{\text{can}}] - [\mathcal{S}]$  est Lipschitz car  $\langle \cdot, \mathcal{S} \rangle_{\mathcal{S}_{\text{can}}}$  l'est. On peut donc se ramener au cas  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$ . Soit alors  $g : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel tel que

$$\Delta g = \deg(R)^{-1} R^*[\mathcal{S}_{\text{can}}] - [\mathcal{S}_{\text{can}}].$$

La fonction  $g$  est Lipschitz sur  $\mathbb{P}_K^1$ , on peut donc trouver une constante  $C > 0$  telle que  $|g(z) - g(w)| \leq C \cdot d_{\mathbb{P}_K^1}(z, w)$  pour tous  $z, w \in \mathbb{P}_K^1$ . D'autre part, la fonction  $R$  est aussi Lipschitz pour une autre constante  $M$  que l'on peut supposer strictement plus grande

que  $\deg(R)$ , voir par exemple [KS, Theorem 10]. De  $\rho_R = \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}_{\text{can}}]$ , on déduit que  $\rho_R = [\mathcal{S}_{\text{can}}] + \Delta g_0$ , avec

$$g_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \deg(R)^{-k} g \circ R^k.$$

On fixe  $N$  entier, et on procède alors aux estimations suivantes :

$$\begin{aligned} |g_0(z) - g_0(w)| &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{|g \circ R^k(z) - g \circ R^k(w)|}{\deg(R)^k} + \sup |g| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{\deg(R)^k} \\ &\leq C_1 \cdot d_{\mathbb{P}_K^1}(z, w) (M/\deg(R))^N + C_2 \cdot \deg(R)^{-N}, \end{aligned}$$

pour des constantes  $C_1, C_2 > 0$  indépendantes de  $z, w, N$ . On choisit maintenant  $N = N(z, w)$  de telle sorte que  $MC_2/C_1 \geq d_{\mathbb{P}_K^1}(z, w) M^N \geq C_2/C_1$ , ce qui est possible dès que  $d_{\mathbb{P}_K^1}(z, w) \leq MC_2/C_1$ . On en déduit qu'il existe une constante  $C > 0$ , indépendante de  $z$  et  $w$ , telle que si l'on pose  $\alpha = \log \deg(R)/\log M$ , alors  $|g_0(z) - g_0(w)| \leq C \cdot d_{\mathbb{P}_K^1}(z, w)^\alpha$ . On note enfin que ces inégalités sur  $\mathbb{P}_K^1$  entraîne les mêmes sur  $\mathbb{P}_K^1$ .

Soit  $z \in \mathbb{P}_K^1$  et  $r > 0$ . Pour montrer l'inégalité  $\rho_R(B(z, r)) \leq C r^\alpha$  on se ramène au cas  $r \in (0, \frac{1}{2})$ . Soit  $\mathcal{S}$  (resp.  $\mathcal{S}'$ ) le point de  $\mathbb{P}_K^1$  associé à la boule  $B(z, r)$  (resp.  $B(z, er)$ ), et soit  $\chi : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel constant égal à 1 sur  $B(z, r)$ , constant égal à 0 hors de  $B(z, er)$ , et tel que  $\Delta \chi = [\mathcal{S}] - [\mathcal{S}']$ . Alors on a

$$\rho_R(B(z, r)) \leq \int \chi d(\Delta g_0) = \int g_0 d(\Delta \chi) = g_0(\mathcal{S}) - g_0(\mathcal{S}') \leq C d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')^\alpha = C r^\alpha.$$

La première égalité résulte de [FR2, Lemmes 4.4 et 4.3] car la fonction énergie est symétrique.  $\square$

**3.2. Démonstration du Théorème A.** Le fait que  $\rho_R$  ne charge aucun point de  $\mathbb{P}_K^1$  est une conséquence de la Proposition 3.3. On montre maintenant que le fait que le support de  $\rho_R$  soit égal à  $J_R$  est une conséquence de (1.1). En effet, considérons une mesure de probabilité quelconque  $\rho$  supportée dans  $J_R$ . Par la Proposition 2.6, le support de la mesure  $R^{*n}\rho$  est contenu dans  $J_R$ . Comme l'ensemble  $J_R$  est disjoint de l'ensemble exceptionnel, et complètement invariant par  $R$  (Proposition 2.9), la convergence (1.1) implique que le support topologique de  $\rho_R$  est contenu dans  $J_R$ . D'autre part, l'équation d'invariance (3.1) et la Proposition 2.6 montrent que le support topologique de  $\rho_R$  est complètement invariant. Comme l'ensemble de Julia est caractérisé comme le plus petit ensemble compact disjoint de l'ensemble exceptionnel qui est complètement invariant par  $R$  (Proposition 2.9), on conclut que le support topologique de  $\rho_R$  est égal à  $J_R$ .

Le reste de cette démonstration est consacré à la preuve de (1.1). L'ensemble exceptionnel  $E_R$  étant totalement invariant, pour tout  $n \geq 1$  on a

$$\deg(R)^{-n} R^{n*} \rho(E_R) = \rho(E_R).$$

Si  $\rho(E_R) > 0$ , on ne peut pas donc avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} R^{n*} \rho = \rho_R$ .

Réciproquement, supposons que  $\rho(E_R) = 0$ . On désigne par  $g : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  le potentiel donné par (2.6), lorsque  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_{\text{can}}$ , de telle sorte que  $\Delta g = \rho - [\mathcal{S}_{\text{can}}]$ . Alors pour tout

$n \geq 1$  on a

$$\deg(R)^{-n} R^{n*} \rho = \deg(R)^{-n} R^{n*} [\mathcal{S}_{\text{can}}] + \Delta(\deg(R)^{-n} g \circ R^n).$$

Il suffit donc de montrer que  $\deg(R)^{-n} g \circ R^n$  converge ponctuellement vers zéro sur  $\mathbb{H}_K$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Pour cela on va estimer les vitesses de convergence des points de  $\mathbb{H}_K$  vers  $\mathbb{P}_K^1$ . Comme on a  $g \leq 0$ , il suffit de montrer  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} g \circ R^n \geq 0$ .

Fixons un point  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{H}_K$ .

Cas 1. *Le point  $\mathcal{S}$  appartient au bassin d'attraction d'un point exceptionnel  $z_0 \in \mathbb{P}_K^1$  de  $R$ .* Quitte à remplacer  $R$  par un itéré on peut supposer  $z_0$  fixé par  $R$ . Après un changement de coordonnées on suppose qu'il existe  $r_0 \in (0, 1)$  tel que pour tout point  $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_K$  satisfaisant  $d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', z_0) < r_0$  on a

$$d_{\mathbb{P}_K^1}(R(\mathcal{S}'), \mathbb{P}_K^1) \geq d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', \mathbb{P}_K^1)^{\deg(R)}.$$

Quitte à remplacer  $\mathcal{S}$  par un point dans son orbite positive, on suppose que  $d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, z_0) < r_0$ . Alors pour tout  $n \geq 1$  on a,

$$d_{\mathbb{P}_K^1}(R^n(\mathcal{S}), \mathbb{P}_K^1) \geq d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1)^{\deg(R)^n}.$$

Fixons  $\varepsilon > 0$ , et soit  $r \in (0, 1)$  assez petit tel que  $\rho(B(z_0, r)) \leq \varepsilon$ . De (2.6) on déduit que pour tout  $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_K$  satisfaisant  $d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', z_0) < r$  on a

$$g(\mathcal{S}) - g(\mathcal{S}') \geq \varepsilon d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}').$$

Comme de plus  $B_{\mathcal{S}'} \subset B_{\mathcal{S}}$ , par (2.1) on a,

$$d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1) - \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', \mathbb{P}_K^1),$$

d'où on obtient,

$$g(\mathcal{S}') \geq \varepsilon \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', z_0) + \left( g(\mathcal{S}) - \varepsilon \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, z_0) \right).$$

On a donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} g(R^n(\mathcal{S})) \geq \varepsilon \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1).$$

Cas 2. *Le point  $\mathcal{S}$  n'appartient pas au bassin d'attraction d'un point exceptionnel et  $\deg_{\text{top}}(R) > 1$ .* Comme  $\deg_{\text{top}}(R) > 1$ , il existe au plus un nombre fini de points dans  $\mathbb{P}_K^1$  dont le degré local est égal au degré de  $R$ . Quitte à remplacer  $R$  par un itéré on suppose que tout point de  $\mathbb{P}_K^1$  dont le degré local est égal à  $\deg(R)$  est exceptionnel. On s'appuie alors sur le lemme suivant.

**Lemme 3.4.** *Supposons que  $\deg_{\text{top}}(R) > 1$ . Alors, on peut trouver des constantes  $r > 0$  et  $C > 0$  tel que tout point  $\mathcal{S}$  satisfaisant  $d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, E_R) < r$  appartienne au bassin d'attraction d'un point exceptionnel, et pour tout point  $\mathcal{S}$  satisfaisant  $d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, E_R) \geq r$  on ait*

$$d_{\mathbb{P}_K^1}(R(\mathcal{S}), \mathbb{P}_K^1) \geq C \times d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1)^{\deg(R)-1}. \quad (3.3)$$

Nous donnons une preuve de ce lemme ci-après.

En itérant la relation précédente, on en déduit pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$d_{\mathbb{P}_K^1}(R^n(\mathcal{S}), \mathbb{P}_K^1) \geq C(n) \times d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1)^{(\deg(R)-1)^n},$$

avec  $C(n) := C \times C^{\deg(R)-1} \times \dots \times C^{(\deg(R)-1)^{n-1}}$ . De (2.1) et (2.6), on tire pour tout  $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_K$

$$g(\mathcal{S}') \geq \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', \mathbb{P}_K^1) - 1 .$$

Par conséquent

$$g(R^n(\mathcal{S})) \geq \log C(n) + (\deg(R) - 1)^n \log d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1) - 1 ,$$

d'où  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} g(R^n(\mathcal{S})) = 0$ .

*Cas 3. Le point  $\mathcal{S}$  n'appartient pas au bassin d'attraction d'un point exceptionnel et  $\deg_{\text{top}}(R) = 1$ .* Dans ce cas la caractéristique de  $K$  est strictement positive, égale à un certain nombre premier  $p$ . De plus, le degré  $q > 1$  de  $R$  est une puissance de  $p$ , et quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que  $R(z) = z^q$ . On note  $\tilde{R}$  la fraction rationnelle à coefficients dans le corps résiduel  $\tilde{K}$  de  $K$ , définie par  $\tilde{R}(\zeta) = \zeta^q$ .

On vérifie aisément que pour tout  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1$  on a

$$d_{\mathbb{H}_K}(R(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) = q \times d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}}) .$$

On a en particulier  $R(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$ . Le cas  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$  est donc immédiat, et on suppose alors que  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1 \setminus \{\mathcal{S}_{\text{can}}\}$ . Considérons la partition de  $\mathbb{P}_K^1 \setminus \{\mathcal{S}_{\text{can}}\}$  en boules ouvertes de  $\mathbb{P}_K^1$  associées aux classes résiduelles,

$$\mathbb{P}_K^1 \setminus \{\mathcal{S}_{\text{can}}\} = \sqcup_{\zeta \in \mathbb{P}_{\tilde{K}}^1} B(\zeta) ,$$

de telle sorte que pour chaque  $\zeta \in \mathbb{P}_{\tilde{K}}^1$  on ait  $R(B(\zeta)) = B(\tilde{R}(\zeta))$ . On montre (cf. [R2, Proposition 4.32]) que pour chaque  $\zeta \in \mathbb{P}_{\tilde{K}}^1$  périodique par  $\tilde{R}$ , la boule  $B(\zeta)$  contient un point périodique par  $R$  de même période. De plus ce point est exceptionnel pour  $R$  et son bassin d'attraction contient la boule  $B(\zeta)$ . Comme par hypothèse le point  $\mathcal{S}$  n'appartient pas à un bassin d'attraction d'un point exceptionnel de  $R$ , si l'on désigne par  $\zeta$  l'élément de  $\mathbb{P}_{\tilde{K}}^1$  tel que la boule  $B(\zeta)$  contienne le point  $\mathcal{S}$ , alors l'orbite positive de  $\zeta$  par  $\tilde{R}$  est infinie. On a en particulier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(B(R^n(\zeta))) = 0 .$$

Par (2.6) pour chaque  $\zeta' \in \mathbb{P}_{\tilde{K}}^1$  et  $\mathcal{S}' \in B(\zeta')$  on a

$$g(\mathcal{S}') \geq -1 - \rho(B(\zeta')) \times d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}', \mathcal{S}_{\text{can}}) ,$$

d'où l'on déduit

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} g(R^n(\mathcal{S})) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \rho(B(\tilde{R}^n(\zeta))) \times d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}}) = 0 .$$

*Démonstration du Lemme 3.4.* L'existence de  $r > 0$  suit de la finitude de  $E_R$ . Pour montrer (3.3), par compacité il suffit de vérifier cette équation localement en tout point  $\mathcal{S}$  tel que  $d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, E_R) \geq r$ . Supposons pour commencer que  $\deg(R) = \deg_{\text{top}}(R)$ , c'est-à-dire que l'ensemble  $\text{Crit}(R) \subset \mathbb{P}_K^1$  où la dérivée de  $R$  s'annule soit fini.

Prenons tout d'abord un point  $\mathcal{S}$  qui ne soit pas dans  $\text{Crit}(R)$ . Quitte à changer de coordonnées, on peut fixer un ouvert fondamental  $U$  contenant  $\mathcal{S}$  tel que

$$\{\infty, R^{-1}(\infty), \text{Crit}(R)\} \cap U = \emptyset .$$



Dans ce cas,  $R'$  ne s'annule pas dans  $U \cap \mathbb{P}_K^1$ , et on peut donc trouver  $C_0 > 0$  tel que  $|R'(z)| \geq C_0$  pour tout  $z \in U \cap \mathbb{P}_K^1$ . La fonction

$$D(z_1, z_2) := \frac{R(z_1) - R(z_2)}{z_1 - z_2} - R'(z_2)$$

est analytique sur  $U \times U$  et s'annule identiquement sur la diagonale. Pour un voisinage convenable  $V$  de la diagonale, et pour tout couple  $(z_1, z_2) \in V \cap (\mathbb{P}_K^1 \times \mathbb{P}_K^1)$ , on a donc

$$|D(z_1, z_2)| < C_0, \text{ et } \left| \frac{R(z_1) - R(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = |R'(z_2)| \geq C_0.$$

Prenons maintenant  $W$  un voisinage ouvert de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{P}_K^1$  tel que  $W \times W \subset V$ . Alors pour tout  $\mathcal{S}' \in W$ , on a  $d_{\mathbb{P}_K^1}(R(\mathcal{S}'), \mathbb{P}_K^1) \geq C_0 \times d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}', \mathbb{P}_K^1)$  ce qu'il fallait démontrer.

Si le point  $\mathcal{S}$  est dans  $\text{Crit}(R)$ , on se ramène au cas où  $\mathcal{S} = R(\mathcal{S}) = 0$  et dans une coordonnée adéquate  $R(z) = \sum_{j \geq k} a_j z^j$  avec  $k \leq \deg(R) - 1$ ,  $a_k \neq 0$  et  $1 \geq |a_j| \rightarrow 0$ . Notons que  $\sup_{|z-w| \leq \tau} |z^j - w^j| = \tau^j$  pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , où le supremum est pris sur tout  $z, w \in B(0, 1)$ . Fixons  $N$  assez grand pour que pour tout  $\tau \leq r$ , on ait  $\max_{j \geq 1} |a_j| \tau^j = \max_{j \leq N} |a_j| \tau^j$ . Prenons  $z \in B(0, 1)$  et  $\tau \leq r$ . Alors  $\sup_{|z-w| \leq \tau} |R(z) - R(w)| = \max_{j \leq N} |a_j| \tau^j \geq |a_k| \tau^k$ . L'image d'une boule par  $R$  étant une boule on conclut donc que  $R(B(z, \tau)) \supset B(R(z), |a_k| \tau^k)$ , ce qui implique  $d_{\mathbb{P}_K^1}(R(\mathcal{S}), \mathbb{P}_K^1) \geq |a_k| d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1)^k$ .

Ceci conclut la preuve de (3.3) dans le cas  $\deg(R) = \deg_{\text{top}}(R)$ . Si ce n'est pas le cas, alors  $K$  est de caractéristique positive  $p > 0$  et  $R$  est la composée d'une fraction  $R_0$  vérifiant  $\deg(R_0) = \deg_{\text{top}}(R_0)$  et d'un itéré de  $F(z) := z^p$ . On a vu que  $d_{\mathbb{P}_K^1}(F(\mathcal{S}), \mathbb{P}_K^1) \geq d_{\mathbb{P}_K^1}(\mathcal{S}, \mathbb{P}_K^1)^p$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**3.3. Mélange et théorème limite central.** La propriété d'équidistribution démontrée au paragraphe précédent permet de montrer l'ergodicité de la mesure d'équilibre, comme a été fait dans [FG, Lemme 4.11]. Afin d'avoir une estimation sur la vitesse de mélange nous utiliserons plutôt une méthode basée sur la notion d'énergie analogue de la preuve de Fornaess-Sibony [FS1, FS2] dans le cas complexe.

Rappelons tout d'abord quelques notions sur l'énergie des mesures. Nous renvoyons à [FR2] pour les détails. Une mesure signée  $\rho$  est dite à *potentiel continu* s'il existe un potentiel continu  $g : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\Delta g = \rho - \rho(\mathbb{P}_K^1)[\mathcal{S}_{\text{can}}]$ . Si  $\rho, \rho'$  sont deux mesures signées dont la mesure trace<sup>5</sup> est à potentiel continu, on montre que la fonction  $\log \sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\}$  est intégrable pour la mesure  $\rho \otimes \rho'$  (voir [FR2, Lemme 4.3]), et on pose

$$(\rho, \rho') := - \int_{\mathbb{A}_K^1 \times \mathbb{A}_K^1 \setminus \text{Diag}} \log \sup\{\mathcal{S}, \mathcal{S}'\} d\rho(\mathcal{S}) \otimes d\rho'(\mathcal{S}').$$

Lorsque de plus  $\rho = \Delta g$ , on vérifie que  $(\rho, \rho') = - \int_{\mathbb{A}_K^1} g d\rho'$ , [FR2, Lemme 4.4]. Enfin, l'application  $\rho, \rho' \mapsto (\rho, \rho')$  définit une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des mesures signées dont la mesure trace est à potentiel continu et telles que  $\rho(\mathbb{P}_K^1) =$

<sup>5</sup>toute mesure signée  $\rho$  est différence de deux mesures positives à support disjoints,  $\rho = \rho_1 - \rho_2$ , voir [Ru, §6]. La mesure trace  $|\rho|$  est par définition la mesure positive  $\rho_1 + \rho_2$ .

$\rho'(\mathbb{P}_K^1) = 0$ . On montre que cette forme bilinéaire est définie positive, [FR2, Proposition 4.5]. On a donc l'inégalité de type Cauchy-Schwarz suivante :

$$(\rho, \rho') \leq (\rho, \rho)^{1/2} (\rho', \rho')^{1/2}.$$

D'autre part, une fonction  $\phi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *de classe  $\mathcal{C}^1$* , si elle est localement constante hors d'un arbre fini et fermé  $\mathcal{T} \subset \mathbb{H}_K$ , et si  $\mathcal{T}$  est la réunion d'un nombre fini de segments sur lesquels  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , par rapport à la distance hyperbolique sur  $\mathbb{H}_K$ . On définit alors pour chaque  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K \setminus \{\mathcal{S}_{\text{can}}\}$  le nombre  $\partial\phi(\mathcal{S})$ , comme la dérivée à gauche en  $\mathcal{S}$  de l'application  $\phi$  restreinte au segment  $[\mathcal{S}_{\text{can}}, \mathcal{S}]$  (paramétré par la distance hyperbolique à  $\mathcal{S}_{\text{can}}$ ). Un calcul montre alors que

$$(\Delta\phi, \Delta\phi) = \int_{\mathbb{P}_K^1} (\partial\phi)^2 d\lambda,$$

où  $\lambda$  est la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle sur chaque segment de  $\mathbb{H}_K$ . Pour reprendre les notations de [FR2, §5.5], on posera  $\langle \phi, \phi \rangle := \int_{\mathbb{P}_K^1} (\partial\phi)^2 d\lambda$ .

Rappelons finalement qu'une mesure invariante  $\rho$  est *mélangeante* pour  $R$  si pour tout couple de fonctions  $\phi, \psi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  de carré intégrable par rapport à  $\rho$ , on a  $\int (\phi \circ R^n) \psi d\rho_R \rightarrow \int \phi d\rho_R \times \int \psi d\rho$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Une mesure mélangeante est *ergodique* au sens où tout sous-ensemble  $E$  invariant est soit de mesure nulle soit de mesure totale.

**Proposition 3.5.** *La mesure  $\rho_R$  est mélangeante, et elle est exponentiellement mélangeante par rapport aux observables de classe  $\mathcal{C}^1$ . Plus précisément, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $\phi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $L^\infty(\rho_R)$ , pour toute fonction  $\psi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{P}_K^1$ , et pour tout entier  $n \geq 0$  on a,*

$$\left| \int (\phi \circ R^n) \times \psi d\rho_R - \int \phi d\rho_R \times \int \psi d\rho_R \right| \leq C \times \|\phi\|_{L^\infty} \times \langle \psi, \psi \rangle^{1/2} \times \deg(R)^{-n/2}. \quad (3.4)$$

La démonstration de cette proposition est ci-dessous. Rappelons qu'une fonction intégrable  $\psi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  de moyenne nulle  $\int \psi d\rho_R = 0$  vérifie le théorème limite central de poids  $\sigma > 0$ , si pour tout intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_R \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \psi \circ R^k \in I \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_I \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

La décroissance exponentielle des corrélations combinée au théorème de Gordin-Liverani (voir [Go, Li]) donne facilement le résultat suivant.

**Proposition 3.6.** *Pour toute fonction  $\psi : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\int \psi d\rho_R = 0$ , le nombre*

$$- \int \psi^2 d\rho_R + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int (\psi \circ R^n) \times \psi d\rho_R,$$

*est fini, positif et il est égal à 0 si et seulement si la fonction  $\psi$  est un cobord, i.e., s'il existe une fonction mesurable  $\chi$  telle que  $\psi = \chi - \chi \circ R$ . De plus, lorsque ce nombre est strictement positif, on note  $\sigma > 0$  sa racine carrée positive, et la fonction  $\psi$  vérifie le théorème limite central pour le poids  $\sigma$ .*

*Démonstration.* La preuve est maintenant classique, voir [CLB, DS3]. Notons  $R^*$  l'opérateur de composition agissant sur  $L^2(\rho_R)$ . L'invariance  $R_*\rho_R = \rho_R$  implique l'égalité  $\int |R^*\psi|^2 d\rho_R = \int |\psi|^2 d\rho_R$  donc  $R^*$  est une isométrie. Soit  $\Lambda$  l'adjoint de  $R^*$ . L'équation d'invariance  $R^*\rho_R = \deg(R)\rho_R$  montre facilement que  $\Lambda = \deg(R)^{-1}R_*$ .

D'après le théorème de Gordin-Liverani [Go, Li], pour montrer qu'une fonction  $\psi \in L^\infty(\rho_R)$  satisfaisant  $\int \psi d\rho_R = 0$  vérifie les assertions de la proposition, il suffit de vérifier  $\sum_{n \geq 0} \|\Lambda^n \psi\|_{L^1(\rho_R)} < +\infty$ . Supposons alors que  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et appliquons la Proposition 3.5, en utilisant l'hypothèse  $\int \psi d\rho_R = 0$ . On obtient

$$\begin{aligned} \int |\Lambda^n \psi| d\rho_R &= \sup_{\|\phi\|_{L^\infty} \leq 1} \int \Lambda^n \psi \times \phi d\rho_R = \sup_{\|\phi\|_{L^\infty} \leq 1} \int \psi \times (\phi \circ R^n) d\rho_R \\ &\leq C \times \langle \psi, \psi \rangle^{1/2} \times \deg(R)^{-n/2}. \end{aligned}$$

On a donc bien la convergence désirée.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 3.5.* Quitte à remplacer  $\phi$  par  $\phi - \int \phi d\rho_R$  on se ramène au cas où  $\int \phi d\rho_R = 0$ , en utilisant  $\|\phi - \int \phi d\rho_R\|_{L^\infty} \leq 2\|\phi\|_{L^\infty}$ . On a donc les estimations :

$$\begin{aligned} &\left| \int (\phi \circ R^n) \psi d\rho_R - \int \phi d\rho_R \times \int \psi d\rho_R \right| \\ &= \left| \int (\phi \circ R^n) \psi d(\deg(R)^{-n} R^{n*} \rho_R) \right| \\ &= \deg(R)^{-n} \left| \int R_*^n ((\phi \circ R^n) \psi) d\rho_R \right| = \deg(R)^{-n} \left| \int \phi R_*^n \psi d\rho_R \right| \\ &= \deg(R)^{-n} \left| \int \psi dR^{n*}(\phi \rho_R) \right| = \deg(R)^{-n} \times (\Delta \psi, R^{n*}(\phi \rho_R)) \\ &\leq \deg(R)^{-n} \times (\Delta \psi, \Delta \psi)^{1/2} \times (R^{n*}(\phi \rho_R), R^{n*}(\phi \rho_R))^{1/2}. \end{aligned}$$

Considérons le potentiel  $g : \mathbb{H}_K \rightarrow \mathbb{R}$ , défini par

$$g(\mathcal{S}) = - \int_{\mathbb{P}_K^1} \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_{\text{can}}} \phi d\rho_R(\mathcal{S}'),$$

de telle sorte que  $\Delta g = \phi \rho_R$ . On a alors :

$$\begin{aligned} |(R^{n*}(\phi \rho_R), R^{n*}(\phi \rho_R))| &= \left| \int g \circ R^n d(R^{n*}(\phi \rho_R)) \right| = \left| \int R_*^n (g \circ R^n) \phi d\rho_R \right| \\ &= \deg(R)^n \times \left| \int g \phi d\rho_R \right| \leq \deg(R)^n \times \|g\|_{L^\infty} \times \|\phi\|_{L^\infty} \\ &\leq \deg(R)^n \times \left( \int_{\mathbb{P}_K^1} \langle \mathcal{S}, \mathcal{S}' \rangle_{\mathcal{S}_{\text{can}}} d\rho_R(\mathcal{S}') \right) \times \|\phi\|_{L^\infty}^2. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration de (3.4). Il reste à montrer que la mesure  $\rho_R$  est mélangeante. La preuve ci-dessus montre que la convergence désirée est vérifiée lorsque  $\phi$  et  $\psi$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . On remarque alors que les fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  forment une algèbre contenant les fonctions constantes. Cette algèbre est dense dans l'ensemble des

fonctions continues (pour la topologie compacte) par le théorème de Stone-Weierstrass. On a donc convergence dès que  $\phi$  et  $\psi$  sont continues. Enfin  $\rho_R$  est une mesure régulière dont le support est compact et métrisable. Par conséquent l'ensemble des fonctions continues définies sur le support de  $\rho_R$  est dense dans  $L^1(\rho_R)$ . Ce qui conclut la preuve.  $\square$

**3.4. Démonstration du Théorème B.** Pour chaque entier  $n \geq 1$  on pose  $D_n := \deg(R)^n + \deg(S)$  et on définit la fonction  $A_n : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow [-\infty, 0]$  par

$$A_n := -\langle R^n, S \rangle_{\mathcal{S}_{\text{can}}} ,$$

de telle sorte que

$$\exp A_n = \frac{\sup\{R^n, S\}}{\max\{1, |R^n|\} \times \max\{1, |S|\}}$$

sur  $\mathbb{P}_K^1 \setminus \{R^n = \infty \text{ ou } S = \infty\}$ , et  $\exp(A_n) \geq \frac{1}{2} d_{\mathbb{P}_K^1}(R^n, S)$  avec égalité sur  $\mathbb{P}_K^1$ . De

$$A_n(z) = \log |R^n(z) - S(z)| - \log \max\{1, |R^n(z)|\} - \log \max\{1, |S(z)|\},$$

on tire

$$\Delta A_n = [R^n = S] - R^{n*}[\mathcal{S}_{\text{can}}] - S^*[\mathcal{S}_{\text{can}}] .$$

Comme dans la preuve de la Proposition-Définition 3.1 on choisit un potentiel  $g$  tel que

$$\Delta g = (\deg(R))^{-1} R^*[\mathcal{S}_{\text{can}}] - [\mathcal{S}_{\text{can}}],$$

et pour chaque entier  $n \geq 1$  on pose

$$g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \deg(R)^{-k} g \circ R^k .$$

D'autre part on choisit un potentiel  $h$  tel que

$$\Delta h = (\deg(S))^{-1} S^*[\mathcal{S}_{\text{can}}] - [\mathcal{S}_{\text{can}}],$$

et pour chaque entier  $n \geq 1$  on pose

$$h_n := D_n^{-1} (\deg(R^n) g_n + \deg(S) h) .$$

On vérifie alors qu'on a

$$\Delta(h_n + D_n^{-1} A_n) = D_n^{-1} [R^n = S] - [\mathcal{S}_{\text{can}}] .$$

Comme dans la preuve de la Proposition-Définition 3.1 on montre que les potentiels  $h_n$  convergent alors uniformément sur  $\mathbb{P}_K^1$  vers

$$g_\infty := \sum_{k=0}^{\infty} \deg(R)^{-k} g \circ R^k .$$

En particulier, pour tout  $n \geq 1$  on a  $h_n + D_n^{-1} A_n \in \mathcal{P}_+$ . Cette suite est de plus uniformément majorée car  $A_n \leq 0$ . La Proposition 2.18 implique donc qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  telle que  $D_{n_k}^{-1} A_{n_k}$  converge ponctuellement sur  $\mathbb{H}_K$  vers une fonction continue  $\psi : \mathbb{H}_K \rightarrow (-\infty, +\infty)$  qui est, soit la fonction constante égale à  $-\infty$ , soit un potentiel tel que  $g_\infty + \psi \in \mathcal{P}_+$ . Dans les deux cas la fonction  $\psi$  s'étend de façon unique à  $\mathbb{P}_K^1$ , en une fonction continue sur chaque segment, et semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{P}_K^1$ .

Pour finir la démonstration du théorème il suffit donc de montrer que  $\psi$  est constante. Comme  $\psi$  est continue sur chaque segment de  $\mathbb{P}_K^1$  et comme  $\psi \leq 0$  (car  $A_n \leq 0$ ), il suffit

de montrer  $\psi$  est localement constante sur l'ensemble ouvert  $\{\psi < 0\}$ . Soit  $U$  un ouvert fondamental dont la fermeture topologique est contenue dans  $\{\psi < 0\}$ . On montre tout d'abord que  $S(\overline{U})$  est contenu dans l'ensemble de quasi-périodicité  $\mathcal{E}_R$  de  $R$ . Lorsque pour chaque  $\varepsilon > 0$  on applique le lemme de Hartogs (Proposition 2.18) à  $\varphi \equiv -\varepsilon$  et  $\mathcal{C} := \overline{U}$ , on obtient que l'application  $R^{n_k}$  converge uniformément vers  $S$  sur  $\overline{U}$ . Ceci implique que pour tout  $k$  suffisamment grand on a  $R^{n_k}(U) = S(U)$ , et par conséquent que  $R^{n_{k+1}-n_k}$  converge vers l'identité sur  $S(U)$ . On a donc  $S(U) \subset \mathcal{E}_R$ , et en particulier  $\mathcal{E}_R \neq \emptyset$ .

Le Lemme 2.14 implique alors que la caractéristique résiduelle de  $K$  est positive, égale à un nombre premier  $p$ . Soit  $Y$  la composante connexe de  $\mathcal{E}_R$  contenant  $S(U)$ . Après changement de coordonnée on suppose que  $\infty \notin Y$ . Soit  $n \geq 1$  l'entier et  $T : \mathbb{Z}_p \times Y \rightarrow Y$  l'action donnée par le Théorème 2.15. Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que  $R^{n_1}(U) = S(U) \subset Y$ , que pour chaque  $k \geq 1$  l'entier  $n$  divise  $n_k - n_1$ , et que  $a_k := n^{-1}(n_k - n_1)$  converge dans  $\mathbb{Z}_p$  vers un certain  $w_0 \in \mathbb{Z}_p$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Comme  $R^{n_k}$  converge uniformément vers  $S$  sur  $U$ , on conclut qu'on a  $S = T^{w_0} \circ R^{n_1}$  sur  $U$ . Le Théorème 2.15 implique alors qu'on a

$$\frac{R^{a_k n + n_1} - S}{a_k - w_0} = \left( \frac{T^{a_k - w_0} - T^0}{a_k - w_0} \right) \circ S \rightarrow T_* \circ S,$$

localement uniformément sur  $U$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . On a donc

$$\begin{aligned} \psi &= \lim_{k \rightarrow +\infty} D_{n_k}^{-1} A_{n_k} = \lim_{k \rightarrow +\infty} D_{n_k}^{-1} (\log |a_k - w_0| + \log |T_* \circ S|) = \\ &\quad \lim_{k \rightarrow +\infty} D_{n_k}^{-1} \log |a_k - w_0| \end{aligned}$$

ponctuellement sur  $U \cap \mathbb{H}_K$ . Ceci montre que  $\psi$  est localement constante sur  $\{\psi < 0\}$ , et termine la démonstration.

#### 4. ENTROPIE

**4.1. Entropie topologique dans les espaces compacts.** L'espace  $P_K^1$  est compact mais non métrisable en général. Les définitions et propriétés de l'entropie souvent décrites dans le cadre restreint des espaces métriques (voir [W]) restent cependant valables dans notre cadre. Nous renvoyons à [Mis] pour plus de détails sur les preuves. Nous rappelons ici brièvement quelques définitions.

Soit  $X$  un espace compact et  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Étant donné un recouvrement ouvert fini  $\mathcal{U}$  de  $X$ , on note  $N(\mathcal{U})$  le nombre minimal d'ouverts de la famille nécessaire pour recouvrir  $X$ . Si  $\mathcal{V}$  est un autre recouvrement ouvert fini de  $X$ , on note

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} := \{U \cap V, U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

C'est aussi un recouvrement ouvert fini de  $X$ . L'entropie topologique de  $f$  notée  $h_{\text{top}}(f)$  est alors définie comme suit :

$$h_{\text{top}}(f) := \sup_{\mathcal{U}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N \left( \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i} \mathcal{U} \right).$$

Le supremum est ici pris sur tous les recouvrements ouverts finis de  $X$ .

Si  $\rho$  est une mesure de probabilité  $f$ -invariante  $f_*\rho = \rho$ , on peut aussi définir l'entropie métrique de  $f$  par rapport à  $\rho$ . L'entropie d'une partition  $\mathfrak{A}$  finie de  $X$  par des ensembles mesurables est donnée par  $H(\mathfrak{A}) = -\sum_{A \in \mathfrak{A}} \rho(A) \log \rho(A)$ . L'entropie de  $f$  notée  $h_\rho(f)$  est alors :

$$h_\rho(f) := \sup_{\mathfrak{A}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathfrak{A}_n)$$

où  $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n}\mathfrak{A}$  et le supremum est pris sur toutes les partitions de  $X$  finies par des ensembles mesurables.

On rappelle maintenant le principe variationnel.

**Proposition 4.1** (Principe Variationnel). *Soit  $X$  un espace topologique compact et soit  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Alors on a  $h_{\text{top}}(f) = \sup_\rho h_\rho(f)$ , où le supremum est pris sur l'ensemble de toutes les mesures de probabilité invariantes par  $f$ .*

Rappelons de plus, que l'ensemble des mesures de probabilité invariantes est un convexe compact pour la convergence vague dont les points extrémaux sont exactement les mesures ergodiques. On montre alors que toute mesure invariante  $\rho$  est « moyenne » de mesures ergodiques (c'est la décomposition de Choquet). En particulier,  $h_{\text{top}}(f)$  est aussi égal au suprémum  $h_\rho(f)$  pris sur l'ensemble des mesure ergodiques. Nous renvoyons à [W] pour plus de précisions.

**4.2. Démonstration du Théorème C.** La démonstration du Théorème C s'appuie sur deux lemmes. On commence avec la propriété générale suivante.

**Lemme 4.2.** *Soit  $X$  un espace topologique séparé et connexe, et soit  $\mathfrak{U}$  un recouvrement fini de  $X$  par des ensembles ouverts et connexes, tel que l'ensemble*

$$\partial\mathfrak{U} := \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \partial U$$

*soit fini et non vide. Alors on a  $N(\mathfrak{U}) \leq \#\partial\mathfrak{U}$ .*

*Démonstration.* Pour chaque  $x \in \partial\mathfrak{U}$  on choisit un élément  $U_x$  de  $\mathfrak{U}$  contenant  $x$ . Il suffit de montrer que pour chaque  $x' \in X$  il existe  $x \in X$  tel que  $U_x$  contient  $x'$ . Lorsque  $x' \in \partial\mathfrak{U}$  il n'y a rien à montrer. On se ramène alors au cas où  $x' \notin \partial\mathfrak{U}$ . Notons  $Y$  la composante connexe de  $X \setminus \partial\mathfrak{U}$  contenant  $x'$ . Comme l'ensemble  $\partial\mathfrak{U}$  est fini et donc fermé, on a  $\partial Y \subset \partial\mathfrak{U}$ . Du fait que  $X$  est connexe et  $\partial U$  est non vide, on conclut que l'ensemble  $\partial Y$  est non vide. Soit  $x \in \partial Y$  et notons que  $U_x$  rencontre  $Y$ . Comme  $Y$  est connexe et comme  $\partial U_x$  est disjoint de  $Y$ , on a  $x' \in Y \subset U_x$ .  $\square$

**Lemme 4.3.** *Soit  $R$  une fraction rationnelle de degré au moins deux à coefficients dans  $K$ , et soit  $X$  une partie compacte et connexe de  $\mathbb{P}_K^1$  invariante par  $R$ . Alors on a*

$$h_{\text{top}}(R|_X) \leq \log \sup\{\#(R|_X)^{-1}(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \in X\}.$$

*Démonstration.* On pose,

$$D := \sup\{\#(R|_X)^{-1}(\mathcal{S}) \mid \mathcal{S} \in X\}.$$

Au vu du Lemme 4.2 il suffit de montrer que pour tout recouvrement fini  $\mathfrak{U}$  de  $X$  on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#\partial \left( \bigvee_{j=0}^{n-1} (R|_X)^{-j}\mathfrak{U} \right) \leq \log D.$$

Soit  $\mathcal{U}$  un tel recouvrement. Comme les ouverts fondamentaux forment une base de la topologie de  $P_K^1$ , on se ramène au cas où chaque élément de  $\mathcal{U}$  est l'intersection d'un ouvert fondamentaux de  $P_K^1$  avec  $X$ . Alors l'ensemble  $\partial\mathcal{U}$  est fini. S'il est vide, alors on a  $X \in \mathcal{U}$  et alors l'assertion est immédiate dans ce cas. On se ramène alors au cas où l'ensemble  $\partial\mathcal{U}$  n'est pas vide. L'inclusion

$$\partial \left( \bigvee_{j=0}^{n-1} (R|_X)^{-j} \mathcal{U} \right) \subset \bigcup_{j=0}^{n-1} (R|_X)^{-j} \partial\mathcal{U},$$

implique qu'on a

$$\partial \left( \bigvee_{j=0}^{n-1} (R|_X)^{-j} \mathcal{U} \right) \leq \#\partial\mathcal{U} \times (1 + D + \dots + D^{n-1}) \leq \#\partial\mathcal{U} \times nD^{n-1},$$

d'où l'on déduit l'inégalité désirée.  $\square$

*Démonstration du Théorème C.* L'inégalité  $h_{\rho_R}(R) \leq h_{\text{top}}(R)$  est conséquence du principe variationnel (ou Proposition 4.1). L'inégalité  $h_{\text{top}}(R) \leq \log \deg_{\text{top}}(R)$  est donnée par le Lemme 4.3 avec  $X = P_K^1$ .

Il reste à montrer l'égalité  $h_{\text{top}}(R) = h_{\text{top}}(R|_{J_R})$ . Au vu du principe variationnel, il suffit de montrer que pour toute mesure de probabilité  $\rho$  invariante par  $R$  et ne chargeant pas  $J_R$ , on a  $h_{\rho}(R) = 0$ . On se ramène au cas où  $\rho$  est ergodique. Le théorème de récurrence de Poincaré montre le support topologique de  $\rho$  est disjoint de l'ouvert des points errants. En particulier,  $\rho$  ne charge pas les composantes de Fatou errantes, ou strictement prépériodiques. Comme  $\rho$  est de plus ergodique, on peut trouver une composante connexe  $U$  de  $F_R$  périodique et un entier  $N \geq 1$  tel que  $R^N(U) = U$  et  $\rho \left( \bigcup_{k=0}^{N-1} R^k(U) \right) = 1$ .

Si  $U$  est le bassin d'attraction immédiat d'un point périodique attractif, alors  $\rho$  charge ce point et est donc à support fini par ergodicité. Son entropie est donc nulle. Sinon, la Proposition 2.16 implique que  $R^N$  est injective sur  $U$ , et alors  $R^N$  est injective sur  $X := \overline{U}$ . Comme  $X$  est un sous-ensemble compact et connexe de  $P_K^1$  invariant par  $R^N$ , le Lemme 4.3 appliqué à  $R^N$  au lieu de  $R$ , implique que  $h_{\text{top}}(R^N|_X) = 0$ . Le principe variationnel nous donne alors  $h_{\rho}(R) = \frac{1}{N} h_{\rho|_U}(R^N) = 0$ .  $\square$

**4.3. Preuve des Théorèmes D et E.** La preuve du Théorème D s'appuie sur le lemme suivant. Rappelons que pour une mesure de probabilité  $\rho$  sur  $P_K^1$  le *Jacobien*  $\text{Jac}_{\rho} : P_K^1 \rightarrow [0, +\infty]$  de  $R$  pour  $\rho$  est la fonction mesurable caractérisée, en dehors d'un ensemble de mesure zero, par la propriété suivante. Pour tout ensemble borélien  $E$  sur lequel  $R$  est injective, on a  $\rho(R(E)) = \int_E \text{Jac}_{\rho} d\rho$ . Une telle fonction existe toujours dans notre cas. Nous renvoyons à [PU, §1.9] ou [P] pour plus de détails.

**Lemme 4.4.**

1. Soit  $E$  un sous ensemble borélien de  $P_K^1$  et soit  $\mathbf{1}_E$  la fonction caractéristique de  $E$ . Alors on a,

$$\int R_* \mathbf{1}_E d\rho_R = \deg(R) \int \mathbf{1}_E d\rho_R. \quad (4.1)$$

2. On a

$$\text{Jac}_{\rho_R}(\mathcal{S}) = \deg(R) / \deg_R(\mathcal{S}).$$

*Démonstration du Lemme 4.4.*

**1.** Nous remercions le rapporteur de nous avoir fourni la preuve suivante. Notons d'abord que l'équation  $R^* \rho_R = \deg(R) \rho_R$  se traduit par l'égalité

$$\int R_* \phi d\rho_R = \deg(R) \int \phi d\rho_R \quad (4.2)$$

pour toute fonction continue  $\phi$ . Par convergence dominée, on a (4.1) pour tout borélien  $E$  tel qu'il existe une suite de fonctions continues  $\varphi_n : \mathbb{P}_K^1 \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\varphi_n \rightarrow \mathbf{1}_E$  ponctuellement. Soit  $\mathcal{F}$  la collection de tous ces ensembles boréliens. Il est clair que  $\mathcal{F}$  est stable par intersection finie (prendre le produit des approximants continus), et par complémentaire (prendre  $1 - \varphi_n$ ). Il est aussi stable par intersection dénombrable par convergence monotone. On conclut en remarquant que  $\mathcal{F}$  contient toutes les boules fermées de  $\mathbb{P}_K^1$ .

**2.** Soit  $E \subset \mathbb{P}_K^1$  un ensemble borélien tel que  $R : E \rightarrow R(E)$  soit bijective. Pour chaque  $k = 1, \dots, \deg(R)$ , notons  $E_k = \{\mathcal{S} \in E, \deg_R(\mathcal{S}) = k\}$ . De (4.1), on tire

$$\deg(R) \times \rho_R(E_k) = \int R_* \mathbf{1}_{E_k} d\rho_R = k \times \rho_R(R(E_k)),$$

d'où,

$$\rho_R(R(E)) = \sum_{k=1}^{\deg(R)} \rho_R(R(E_k)) = \int_E \frac{\deg(R)}{\deg_R(\mathcal{S})} d\rho_R(\mathcal{S}).$$

□

*Démonstration du Théorème D.* La preuve de l'estimation (1.5) est une conséquence de la formule de Rokhlin [PU, §1.9] ou [P, §10] qui s'énonce sous la forme suivante :

$$h_{\rho_R}(R) \geq \int \log |\text{Jac}_{\rho_R}(\mathcal{S})| d\rho_R(\mathcal{S}). \quad (4.3)$$

Cette formule s'applique dans notre contexte car  $R$  est à fibres finies. Il est alors clair que l'équation (1.5) découle de (4.3), de la partie 2 du Lemme 4.4, et de la définition du degré moyen.

Supposons maintenant que  $\rho_R$  ne charge pas  $\mathbb{H}_K$ . Comme le degré local de  $R$  est constant sur  $\mathbb{P}_K^1$  égal à  $\deg(R) / \deg_{\text{top}}(R)$ , hors d'un ensemble fini, la Proposition 3.3 implique  $\underline{\deg} = \deg(R) / \deg_{\text{top}}(R)$ . Les égalités désirées découlent alors de l'estimation  $h_{\rho_R}(R) \geq \log \frac{\deg(R)}{\underline{\deg}(R)}$ . □

*Démonstration du Théorème E.* On montre tout d'abord l'équivalence de (1), (2), (3), et (4). L'implication (1)⇒(2) est une conséquence immédiate du principe variationnel (Proposition 4.1). Pour montrer l'implication (2)⇒(3) supposons que  $\phi \circ R \circ \phi^{-1}$  n'ait bonne réduction pour aucune application de Möbius  $\phi$ . Quitte à remplacer  $R$  par un itéré assez grand on se ramène au cas où pour tout  $\mathcal{S} \in J_R$  on a  $\deg_R(\mathcal{S}) \leq \deg(R) - 1$ , voir Lemme 2.12. Comme  $\rho_R$  est une mesure supportée dans l'ensemble de Julia, on a

$$\log \underline{\deg}(R) = \int \log \deg_R(\mathcal{S}) d\rho_R(\mathcal{S}) \leq \log(\deg(R) - 1) < \log \deg(R),$$



et le Théorème D implique alors  $h_{\rho_R}(R) > 0$ . Pour montrer l'implication (3) $\Rightarrow$ (4), notons d'abord que si  $R$  a bonne réduction, alors le point  $\mathcal{S}_{\text{can}} \in \mathbb{H}_K$  associé à la boule unité est totalement invariant. On a donc  $R^*[\mathcal{S}_{\text{can}}] = \deg(R)[\mathcal{S}_{\text{can}}]$ , et par définition de la mesure d'équilibre, on a  $\rho_R := \lim_{n \rightarrow +\infty} \deg(R)^{-n} R^{n*}[\mathcal{S}_{\text{can}}] = [\mathcal{S}_{\text{can}}]$ . Notons finalement que l'implication (4) $\Rightarrow$ (1) est immédiate.

Comme l'implication (4) $\Rightarrow$ (5) est immédiate, pour compléter la preuve du théorème il suffit de montrer l'implication (5) $\Rightarrow$ (3). Supposons qu'il existe  $\mathcal{S} \in \mathbb{P}_K^1$  tel que  $\rho_R\{\mathcal{S}\} > 0$ . La Proposition 3.3 implique  $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_K$ . On tire de l'équation d'invariance (3.2) que pour tout point  $\mathcal{S}'$  dans la grande orbite

$$\mathcal{G} := \bigcup_{n \geq 0, m \geq 0} R^{-m}(R^n\{\mathcal{S}\})$$

de  $\mathcal{S}$ , on a  $\rho_R\{\mathcal{S}'\} > 0$ . La masse de  $\rho_R$  étant finie, quitte à remplacer  $\mathcal{S}$  par un autre élément de  $\mathcal{G}$ , on peut supposer  $\rho_R\{\mathcal{S}\} \geq \rho_R\{\mathcal{S}'\}$  pour tout point  $\mathcal{S}' \in \mathcal{G}$ .

On a alors

$$\rho_R\{\mathcal{S}\} = \frac{\deg_R(\mathcal{S})}{\deg(R)} \rho_R\{R(\mathcal{S})\} \leq \rho_R\{R(\mathcal{S})\} \leq \rho_R\{\mathcal{S}\},$$

d'où  $\rho_R(\mathcal{S}) = \rho_R(R(\mathcal{S}))$ ,  $\deg_R(\mathcal{S}) = \deg(R)$ , et  $R^{-1}(R(\mathcal{S})) = \{\mathcal{S}\}$ . Par le même argument  $\rho_R(R^n(\mathcal{S})) = \rho_R(\mathcal{S})$  pour tout  $n \geq 0$ . La masse de  $\rho_R$  étant finie, on en déduit que la grande orbite  $\mathcal{G}$  est finie. La Proposition 2.11 montre alors que  $R$  est conjuguée à une fraction rationnelle ayant bonne réduction.  $\square$

## 5. EXEMPLES

Nous donnons dans cette section quelques exemples significatifs afin d'éclairer les différences entre les contextes complexe et non archimédien.

**5.1. Exemples de Lattès.** Les exemples que nous allons décrire s'inspirent directement de leurs analogues complexes (voir [Mi2] pour une discussion détaillée dans ce cadre). Afin de simplifier la discussion nous supposons que la caractéristique de  $K$  est différente de 2 bien que ce ne soit pas strictement nécessaire. Rappelons de plus que  $K$  est toujours supposé algébriquement clos et complet.

Soit  $q \in K$  satisfaisant  $0 < |q| < 1$ . Le quotient  $K^*/q^{\mathbb{Z}}$  du groupe multiplicatif  $K^*$  est une courbe elliptique  $E_q$  dont le  $j$ -invariant vérifie  $|j(E_q)| > 1$ . Réciproquement, toute courbe elliptique dont le  $j$ -invariant est de module strictement plus grand que 1 peut être obtenue ainsi, voir [Sil1, II, §6, Theorem 6.1] ou [Roq, §6]. Pour chaque entier  $m \in \mathbb{Z}$ , l'endomorphisme  $z \mapsto z^m$  sur  $K^*$  passe au quotient et induit l'endomorphisme  $[m]$  de multiplication par  $m$  sur  $E_q$ .

Le quotient de  $E_q$  par l'involution  $[-1]$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_K^1$ . Par exemple si  $E_q$  est donné par une équation de Weierstrass dans le plan  $y^2 = x^3 + a_4x + a_6$ , alors  $[-1]$  est le morphisme  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$  et l'isomorphisme  $E_q/[-1] \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  est induit par la projection  $(x, y) \mapsto x$ . Comme  $[m]$  commute avec  $[-1]$ , l'endomorphisme  $[m]$  définit une fraction rationnelle  $L_{m,q}$  sur  $\mathbb{P}_K^1$  de type Lattès, voir Remarque 5.2.

Pour tout  $t$  réel, notons  $\mathcal{S}(t)$  le point de  $\mathbb{H}_K$  associé à la boule de centre 0 et de rayon  $\exp(t)$ .

**Proposition 5.1.** *La fraction rationnelle  $L_{m,q}$  est de degré  $m^2$  et son ensemble de Julia  $J_{m,q}$  est un segment fermé inclus dans  $\mathbb{H}_K$  et non réduit à un point. De plus, si pour tout  $i = 0, \dots, 2m - 1$  et  $t \in [-\frac{i}{2m} \log |q|, -\frac{i+1}{2m} \log |q|]$  on pose*

$$L(t) = \begin{cases} mt + \frac{i}{2} \log |q| & \text{si } i \text{ est pair} \\ -mt - \frac{i+1}{2} \log |q| & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

*dans des coordonnées convenables, on a*

$$J_{m,q} = \{\mathcal{S}(t), t \in [0, -2^{-1} \log |q|]\}$$

*et  $L_{m,q} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ L$  sur  $[0, -2^{-1} \log |q|]$ . En particulier,  $h_{\text{top}}(L_{m,q}) = \log m$ .*

**Remarque 5.2.** Une fraction rationnelle  $R \in K(z)$  est dite de Lattès s'il existe une courbe elliptique  $E$ , un endomorphisme  $g : E \rightarrow E$  et un morphisme fini  $\pi : E \rightarrow \mathbb{P}_K^1$  tel que  $R \circ \pi = \pi \circ g$ . Lorsque  $|j(E)| \leq 1$ , alors  $R$  est conjuguée à une fraction rationnelle ayant bonne réduction. Sur une courbe pour laquelle  $\text{End}(E) \not\cong \mathbb{Z}$ , on peut aussi prendre pour  $g$  un endomorphisme de degré plus grand ou égal à 2 qui n'est pas la multiplication par un entier. Dans ce cas l'invariant  $j(E)$  est un entier algébrique [Roq, §6] et par conséquent les exemples obtenus ont bonne réduction.

**Remarque 5.3.** Dans le cas complexe, une application de Lattès est caractérisée par le fait que sa mesure d'équilibre est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, voir [Z, May] et aussi [BD] pour une généralisation aux dimensions supérieures. Ce type de résultat n'est pas transposable tel quel dans le cadre non archimédien. En effet une petite perturbation de  $L_{m,q}$  ne change pas l'action sur un compact fixé de  $(\mathbb{H}_K, d_{\mathbb{H}_K})$ , et par suite toute fraction de degré  $m^2$  suffisamment proche de  $L_{m,q}$  possède le même ensemble de Julia et la même action sur cet ensemble.

**Remarque 5.4.** La loi d'addition sur une courbe elliptique est explicite. On peut ainsi obtenir facilement une formule pour les fractions  $L_{m,q}$  avec  $m$  petit. On trouve par exemple  $L_{2,q}(T) = \frac{(T^2 - \lambda)^2}{4T(T-1)(T-\lambda)}$ , pour un  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  dépendant de  $q$ . Nous renvoyons par exemple à [Mi1, §5].

*Démonstration de la Proposition 5.1.* Notons  $A^* = \mathbb{P}_K^1 \setminus \{0, \infty\}$ . C'est aussi l'espace analytique de Berkovich associé au groupe multiplicatif  $K^*$ . Notons  $\mathcal{L} \subset A^*$  le segment ouvert joignant 0 à  $\infty$  dans  $\mathbb{P}_K^1$ . Soit  $G$  le sous-groupe d'automorphismes de  $A^*$  engendré par les morphismes  $z \mapsto qz$  et  $z \mapsto z^{-1}$ . Le quotient  $A^*/G$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_K^1$ . Par ailleurs,  $G$  préserve  $\mathcal{L}$ , et le quotient topologique de  $\mathcal{L}$  par  $G$  est un segment  $J \subset \mathbb{H}_K$ . On remarque maintenant que  $\mathcal{L}$  est totalement invariant par le morphisme  $z \mapsto z^m$ , donc  $J$  est aussi totalement invariant par  $L_{m,q}$ . Il est facile de voir que  $J$  ne contient pas de sous-ensemble compact strict totalement invariant, donc  $J$  est l'ensemble de Julia de  $L_{m,q}$  par la Proposition 2.9. La formule explicite de l'action de  $L_{m,q}$  sur son ensemble de Julia résulte de l'action de  $z \mapsto z^m$  sur  $\mathcal{L}$  par passage au quotient.  $\square$

**5.2. La mesure d'équilibre n'est pas d'entropie maximale.** Dans cette section on donne quelques exemples robustes de fractions rationnelles dont la mesure d'équilibre n'est pas d'entropie maximale.

Étant donné un segment  $I$  de  $\mathbb{H}_K$  et une partie  $D$  de  $I$ , on dira qu'une application continue  $T : D \rightarrow I$  est *affine par morceaux* s'il existe  $k \geq 1$  et des segments fermés  $I_1, \dots, I_k$  de  $\mathbb{H}_K$ , dont la réunion est égale à  $D$ , et tels que pour chaque  $j = 1, \dots, k$  l'application  $T : I_j \rightarrow I$  soit affine par rapport à la distance  $d_{\mathbb{H}_K}$ . Si de plus  $D \subset I$ ,  $k \geq 2$ , et pour chaque  $j = 1, \dots, k$  l'application  $T : I_j \rightarrow I$  est bijective, alors on dira que  $T$  est *Bernoulli* (voir Figure 5.2 pour un exemple). Dans ce cas l'entier  $k$  et les segments  $I_1, \dots, I_k$  sont uniquement déterminés par  $T$ . On appelle  $k$  le *degré topologique* de  $T$ .

Soit  $T : D \rightarrow I$  une application affine par morceaux et Bernoulli,  $k$  un entier et  $I_1, \dots, I_k$  comme ci-dessus. L'ensemble invariant maximal de  $T$ , que l'on note

$$J_T := \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(I),$$

est alors l'unique partie compacte de  $I$  complètement invariante par  $T$ . Notons de plus que l'entropie topologique de  $T|_{J_T}$  est égale à  $\log k$ , et que les segments  $I_1, \dots, I_k$  forment une partition génératrice finie<sup>6</sup> pour  $T$ . Par conséquent la formule de Rokhlin s'applique, et donne que pour toute mesure  $\rho$  invariante par  $T$ , on a

$$h_\rho(T|_{J_T}) = \int \text{Jac}_\rho \, d\rho.$$

Nous renvoyons à nouveau à [PU, §1.9] ou [P, §10] pour plus de précisions.

**Lemme 5.5.** *Soit  $R$  une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$ . Supposons qu'il existe un segment  $I$  de  $\mathbb{H}_K$  et une partie  $D$  de  $I$  telle que  $R : D \rightarrow I$  soit une application affine par morceaux et Bernoulli. Supposons de plus que, si l'on note par  $k$  le degré topologique de cette application, alors les pentes correspondantes  $d_1, \dots, d_k$  satisfont  $\sum_{j=1}^k d_j = \deg(R)$ . Alors l'ensemble de Julia de  $R$  est égal à l'ensemble invariant maximal de  $R : D \rightarrow I$ , l'entropie topologique de  $R$  est égale à  $\log k$ , et on a*

$$h_{\rho_R}(R) = \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{\deg(R)} \log \left( \frac{d_j}{\deg(R)} \right) \leq h_{\text{top}}(R),$$

avec égalité si et seulement si  $d_1 = \dots = d_k$ .

La démonstration de ce lemme est ci-dessous. Étant donné un entier  $d \geq 5$  et  $a \in K$  satisfaisant  $|a| \in (0, 1)$ , soit  $R_0(z) = \frac{z^{d-2}}{1+(az)^d}$ . Montrons l'inégalité (1.3). Soit  $\mathcal{S}(t)$  le point dans  $\mathbb{H}_K$  associé à la boule  $\{z \in \mathbb{P}_K^1, \log |z| \leq t\}$ . On vérifie alors que pour chaque  $t \in \mathbb{R}$  on a

$$R_0(\mathcal{S}(t)) = \begin{cases} \mathcal{S}((d-2)t) & \text{si } t \leq -\log |a|; \\ \mathcal{S}(-d \log |a| - 2t) & \text{si } t \geq -\log |a|. \end{cases}$$

Si l'on pose  $I := \{\mathcal{S}(t), t \in [0, -\frac{d}{2} \log |a|]\}$ , et,

$$I_1 := \{\mathcal{S}(t), t \in [0, -\frac{d}{2(d-2)} \log |a|]\}, \quad I_2 := \{\mathcal{S}(t), t \in [-\frac{d}{4} \log |a|, -\frac{d}{2} \log |a|]\},$$

<sup>6</sup>i.e. Pour chaque suite  $\{\sigma(j)\}_{j \geq 1}$  d'éléments de  $\{1, \dots, k\}$  l'ensemble  $\bigcap_{j \geq 0} T^{-j} I_{\sigma(j)}$  est réduit à un point

alors les applications  $R_0 : I_1 \rightarrow I$  et  $R_0 : I_2 \rightarrow I$  sont bijectives et affines de pente  $d-2$  et 2, respectivement. L'application  $R_0 : I_1 \cup I_2 \rightarrow I$  est donc affine par morceaux et Bernoulli, et le lemme implique alors (1.3). Notons de plus que, comme l'ensemble  $I_1 \cup I_2$  est borné dans  $\mathbb{H}_K$  par rapport à la métrique  $d_{\mathbb{H}_K}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{U}_d$  de  $R_0$  dans l'espace des fractions rationnelles de degré  $d$ , tel que toute  $R \in \mathcal{U}_d$  coïncide avec  $R_0$  sur  $I_1 \cup I_2$ . Le lemme s'applique alors à chaque élément  $R$  de  $\mathcal{U}_d$ , et on obtient (1.3) lorsqu'on remplace  $R_0$  par  $R$ .

Plus généralement, soient  $k \geq 2$  et  $d_1, \dots, d_k > 1$  des entiers, et soient  $a_2, \dots, a_k \in K^*$  tels que  $|a_k| > \dots > |a_2| > 0$ . On pose  $\delta_1 = d_1$ ,  $t_{k+1} = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ , et pour chaque  $j \in \{2, \dots, k\}$ ,  $\delta_j = d_j + d_{j-1}$  et  $t_j = -\ln |a_j|$ . Finalement, on désigne par  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'unique application continue égale à  $t \mapsto d_1 t$  sur  $(-\infty, t_2)$ , et pour chaque  $j \in \{2, \dots, k\}$ , affine de pente  $(-1)^j d_j$  sur  $[t_j, t_{j+1}]$ . Alors on vérifie que la fraction rationnelle

$$R(z) := z^{d_1} \prod_{j=2}^k \left(1 + (a_j z)^{\delta_j}\right)^{(-1)^j}, \quad (5.1)$$

est de degré  $\sum_{j=1}^k d_j$ , et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $R(\mathcal{S}(t)) = \mathcal{S}(T(t))$ . Il est alors facile de voir que lorsque  $\sum_{j=1}^k d_j^{-1} \leq 1$ , on peut choisir  $a_2, \dots, a_k$  de telle sorte qu'il existe un intervalle compact  $J$  de  $\mathbb{R}$ , pour lequel l'application  $R : \{\mathcal{S}(t), T(t) \in J\} \rightarrow \{\mathcal{S}(t), t \in J\}$  soit Bernoulli de degré  $k$ , avec pentes  $d_1, \dots, d_k$ . Le lemme implique alors que l'ensemble de Julia de  $R$  est égal à l'image par l'application  $\mathcal{S} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) \subset \mathbb{H}_K$  de l'ensemble invariant maximal de  $T$  dans  $J$ . Notons en particulier que l'ensemble de Julia de  $R$  est contenu dans un segment compact de  $\mathbb{H}_K$ , et qu'il est un segment (resp. un ensemble de Cantor) lorsque  $\sum_{j=1}^k d_j^{-1} = 1$  (resp.  $\sum_{j=1}^k d_j^{-1} < 1$ ). Notons d'autre part, que lorsque les entiers  $d_1, \dots, d_k$  ne sont pas tous égaux, le degré de la fraction rationnelle (5.1) est au moins 5. Si de plus l'ensemble de Julia de cette fraction rationnelle est un intervalle, c'est-à-dire lorsque  $\sum_{j=1}^k d_j^{-1} = 1$ , alors le degré est au moins égal à 10.

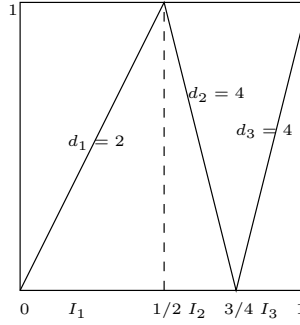
Concrètement, notons que la fraction rationnelle  $R_0$  définie ci-dessus, est de degré  $d \geq 5$ , et qu'elle est donnée par (5.1) lorsque  $k = 2$ ,  $d_1 = d - 2$ ,  $d_2 = 2$  et  $a_2 = a$ . D'autre part, si  $k = 3$ ,  $d_1 = 2$ ,  $d_2 = 4$ ,  $d_3 = 4$  et  $a_2, a_3 \in K$  vérifient  $0 < |a_2| = |a_3|^{2/3} < 1$ , alors la fraction rationnelle

$$R_1(z) = z^2 \frac{1 + (a_3 z)^8}{1 + (a_2 z)^6}, \quad (5.2)$$

est de degré 10, et si l'on note  $I := \{\mathcal{S}(t), t \in [0, -2 \log |a_2|]\}$ , alors l'application  $R : I \rightarrow I$  est affine par morceaux, Bernoulli, et le lemme implique que  $J_{R_1} = I$  et  $h_{\rho_{R_1}}(R_1) < h_{\text{top}}(R_1)$  (voir Figure 5.2).

**Question 3.** Les exemples précédents motivent les questions suivantes. Existe-t-il un polynôme (resp. une fraction rationnelle de degré au plus 4, ou une fraction rationnelle de degré au plus 9 et d'ensemble de Julia connexe) dont la mesure d'équilibre ne soit pas d'entropie maximale ?

*Démonstration du Lemme 5.5.* On peut supposer que  $k \geq 2$ . Sinon  $J$  est réduit à un point et  $R$  a bonne réduction dans une coordonnée adéquate. Soient  $I_1, \dots, I_k$  les segments dans  $I$  tels que pour chaque  $j = 1, \dots, k$  l'application  $R : I_j \rightarrow I$  soit bijective

FIG. 2. Action de  $R_1$  avec  $|a_2| = |a_3|^{2/3} = e^{-2}$ 

et affine de pente  $d_j$ . Alors le degré local de  $R$  en tout point dans l'intérieur de  $I_j$  est au moins  $d_j$ . Comme par hypothèse on a  $\sum_{j=1}^k d_j = \deg(R)$ , on en déduit que pour chaque  $j = 1, \dots, k$  le degré local de  $R$  en chaque point de l'intérieur de  $I_j$  est égal à  $d_j$ , et que la préimage par  $R$  de l'intérieur de  $I$  est contenue dans  $I$ . Comme  $R$  est continue, on a  $R^{-1}(I) \subset I$ . La Proposition 2.9 implique alors que l'ensemble de Julia de  $R$  est contenu dans l'ensemble invariant maximal  $J_{R|_D}$  de  $R : D \rightarrow I$ . Comme ce dernier ensemble est le plus petit sous-ensemble compact de  $I$  complètement invariant par  $R|_D$ , on a  $J_R = J_{R|_D}$ . Par le Théorème C on a donc

$$h_{\text{top}}(R) = h_{\text{top}}(R|_{J_R}) = h_{\text{top}}(R|_{J_{R|_D}}) = \log k.$$

Comme le degré local de  $R$  est constant égal à  $d_j$  sur l'intérieur de  $I_j$ , la partie 2 du Lemme 4.4 implique que le Jacobien  $\text{Jac}_{\rho_R}$  de la mesure  $\rho_R$  est égal à  $\deg(R)/d_j$  sur un sous-ensemble de mesure pleine de  $I_j$ . On a alors  $\rho_R(I_j) = d_j/\deg(R)$ , et par la formule de Rokhlin,

$$h_{\rho_R}(R) = \int \text{Jac}_{\rho_R} d\rho_R = \sum_{j=1}^k \frac{d_j}{\deg(R)} \log \left( \frac{d_j}{\deg(R)} \right).$$

L'inégalité et la dernière assertion du lemme sont alors des conséquences de la convexité stricte de la fonction  $x \mapsto -x \log x$ .  $\square$

**5.3. Deux exemples de polynômes en caractéristique mixte.** Nous donnons enfin deux exemples de polynômes sur  $\mathbb{C}_p$  le complété de la clôture algébrique du corps  $\mathbb{Q}_p$  muni de la norme  $p$ -adique. La particularité de ce corps est le fait que sa caractéristique est nulle, tandis que sa caractéristique résiduelle est égale à  $p > 1$ . Rappelons que  $\mathbb{H}_K^\circ$  désigne l'ensemble des points non singuliers de  $\mathbb{H}_K$ , c'est-à-dire l'union des points rationnels et irrationnels.

Le premier exemple est extrait de [R2, Exemple 6.3].

**Proposition 5.6.** *Soit  $P(z) = p^{-1}(z^p - z^{p^2})$ . Alors l'ensemble de Julia de  $P$  est inclus dans le sous-ensemble  $\{\text{diam} = p^{-1/(p-1)}\} \subset \mathbb{H}_K$ . De plus, il existe une application continue  $\pi : J_P \rightarrow \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  conjuguant  $P|_{J_P}$  au décalage. La mesure d'équilibre est l'unique mesure d'entropie maximale, d'entropie égale à  $\log p$ . Les points de  $\mathbb{H}_K^\circ \cap J_P$  sont tous prépériodiques, et les points périodiques sont tous répulsifs. En particulier, presque tout point pour la mesure d'équilibre appartient à  $\mathbb{H}_K \setminus \mathbb{H}_K^\circ$ .*

Une légère modification du polynome précédent permet d'obtenir le résultat suivant.

**Proposition 5.7.** *Soit  $Q(z) = p^{-1}(z^p - z^{p^2}) + pz^{p^2+1}$ . Alors la restriction  $Q|_{J_Q}$  n'est pas localement injective (pour la topologie induite par la métrique  $d_{\mathbb{P}_K^1}$ ) sur un ensemble non dénombrable.*

*Démonstration de la Proposition 5.6.* On montre que  $|P(z+w) - P(w)| = p|z|^p$  pour tout  $p^{-1/(p-1)} < |z| < 1$  et tout  $|w| \leq 1$ . En particulier la préimage de toute boule fermée  $B \subset \{|z| \leq 1\}$  et de diamètre au moins  $p^{-1/(p-1)}$  est une réunion de  $p$  boules fermées disjointes  $B_i$  avec  $\text{diam}(B_i) = (p^{-1} \text{diam}(B))^{1/p} > p^{-1/(p-1)}$ , et  $P : B_i \rightarrow B$  est de degré  $p$ .

En particulier, posons  $P^{-1}\{|z| \leq 1\} = B'_1 \cup \dots \cup B'_p$ , et notons  $B'_{i_1, \dots, i_k}$  la composante de  $P^{-n}\{|z| \leq 1\}$  telle que  $P^j(B'_{i_1, \dots, i_k}) \subset B'_{i_j}$  pour tout  $j$ . Cette composante est une boule fermée de rayon  $p^{-(1-p^{-k})/(p-1)} > p^{-1/(p-1)}$ , et pour toute suite infinie  $\alpha = \{i_k\} \in \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$ , la suite  $B'_{i_1, \dots, i_k}$  est décroissante avec  $k$ . Les normes  $\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{H}_K$  associées sont donc décroissantes, et convergent vers un point  $\mathcal{S}_\alpha$  de  $\mathbb{H}_K \cap J_P$  tel que  $\text{diam}(\mathcal{S}_\alpha) = p^{-1/(p-1)}$ .

Tout point hors de  $\{|z| > 1\}$  est attiré par l'infini, donc on a l'inclusion  $J_P \subset K_P := \bigcap_{n \geq 0} P^{-n}\{|z| \leq 1\}$ . Il vérifie de plus que  $J_P$  est égal au bord de  $K_P$ . L'application  $\pi : J_P \rightarrow \{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$  définie en envoyant  $\mathcal{S}$  sur la suite  $(i_k)$  telle que  $P^n(\mathcal{S}) \in B'_{i_n}$  pour tout  $n \geq 0$  est alors continue et son inverse est donnée par  $\alpha \rightarrow \mathcal{S}_\alpha$ . On conclut donc que  $P$  est conjugué au décalage par  $\pi$ .

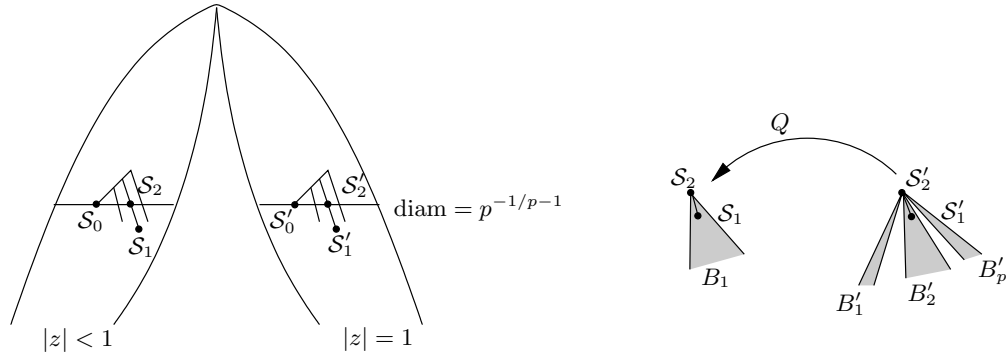
Calculons maintenant l'image de la mesure d'équilibre par  $\pi_*$ . On vérifie par récurrence que  $p^{-2n} P^{n*}[\mathcal{S}_{\text{can}}] = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} p^{-n} [\mathcal{S}_{i_1, \dots, i_n}]$  pour tout entier  $n$ . Comme  $p^{-2n} P^{n*}[\mathcal{S}_{\text{can}}] \rightarrow \rho_P$ , on voit donc que  $\pi_* \rho_P$  s'identifie à la mesure équilibrée sur l'espace des suites de symboles  $\{1, \dots, p\}^{\mathbb{N}}$ .

Enfin on montre que  $\mathcal{S}_\alpha \in \mathbb{H}_K^0$  si et seulement si  $\alpha$  est pré périodique pour le décalage. Cette assertion est démontrée précisément dans [R2, Exemple 6.3]. Le fait que les points périodiques sont répulsifs résulte de  $A \subset \{\deg_P = p\}$ .  $\square$

*Démonstration de la Proposition 5.7.* Notons que  $Q = P + pz^{p^2}$ . On vérifie tout d'abord que  $P = Q$  sur l'ensemble  $A := \{|S| \leq 1\} \cap \{\text{diam} = p^{-1/(p-1)}\}$ . On a vu sur l'exemple précédent que  $J_P \subset A$ , et que les points répulsifs étaient denses dans  $J_P$ . On en déduit que donc  $J_P \subset J_Q$ . Dans la suite, on notera  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}} = \mathbb{H}_K^{[K^*]}$  pour  $K = \mathbb{C}_p$ .

**Lemme 5.8.** *Pour tout  $\mathcal{S}_0 \in J_P$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\mathcal{S} \in J_Q \cap \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  tel que  $d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}, \mathcal{S}_0) \leq \varepsilon$  et  $\text{diam}(\mathcal{S}) < p^{-1/(p-1)}$ .*

Prenons  $\mathcal{S}_0$  dans  $J_Q$  et  $\mathcal{S}'_0$  une préimage de  $\mathcal{S}_0$  par  $Q$  contenue dans  $\{|S| = 1\}$ . Nous allons montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la restriction de  $Q$  à la boule de centre  $\mathcal{S}'_0$  et de diamètre  $\varepsilon$  (pour la métrique  $d_{\mathbb{H}_K}$ ) n'est pas injective. Pour cela, on utilise le lemme précédent et on prend  $\mathcal{S}_1 \in J_P \cap \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  tel que  $d_{\mathbb{H}_K}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_0) \leq \varepsilon$ , et  $\text{diam}(\mathcal{S}_1) < p^{-1/(p-1)}$ . Un tel point admet une préimage  $\mathcal{S}'_1$  dont la distance à  $\mathcal{S}'_0$  est  $\leq p \times \varepsilon$ . Il est facile de voir que  $Q$  envoie toute boule centrée en un point  $|z| = 1$  et de diamètre  $p^{-1/(p-1)}$  sur une boule de diamètre  $p^{-1/(p-1)}$ . On en déduit l'existence d'un point  $\mathcal{S}'_2 \in ]\mathcal{S}'_0, \mathcal{S}'_1]$  de diamètre égal à  $p^{-1/(p-1)}$ . Notons que  $\deg_P(\mathcal{S}) = 1$  dès que  $\text{diam}(\mathcal{S}) < p^{-1/(p-1)}$ .

FIG. 3. Positions des points  $S_i$  et  $S'_i$ 

Comme  $Q = P$  dans un voisinage (pour la métrique  $d_{\mathbb{H}_K}$ ) de  $A$ , la boule ouverte  $B_1$  associée à  $S_2$  et contenant  $S_1$  admet  $p$  préimages  $B'_i$  dont les adhérences contiennent  $S'_2$  (voir Figure 5.3). La restriction de  $P$  à chacune des  $B'_i$  est injective et on en déduit donc que  $S_1$  admet une préimage par  $Q$  dans chaque  $B'_i$ . Chacune de ces préimages est à  $d_{\mathbb{H}_K}$ -distance au plus  $\varepsilon$  de  $S'_2$  donc au plus  $(p+1)\varepsilon$  de  $S'_*$ . Nous avons donc montré que  $Q$  n'est injective sur aucune boule pour  $d_{\mathbb{H}_K}$  centrée en  $S'_0$ .

On en déduit que  $Q$  ne peut être localement injective en toute préimage de  $J_P$  par  $Q$  contenue dans  $\{|S| = 1\}$ . L'ensemble  $J_P$  étant de type de Cantor, on en déduit la non locale injectivité de  $Q$  sur un ensemble non dénombrable.  $\square$

*Démonstration du Lemme 5.8.* On traite tout d'abord le cas du point de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  associé à la boule centrée en 0 et de diamètre  $p^{-1/(p-1)}$ .

On remarque tout d'abord l'existence d'un point fixe  $z_0$  de module  $p^2$ . Pour voir cela, on applique [Rob, Theorem 1, p.307] en notant que pour  $|z| = p^2$ , on a  $|p^{-1}z^{p^2}| = |pz^{p^2+1}| > \max\{|p^{-1}z^p|, |z|\}$ . Un calcul montre que  $|Q'(z)| = |pz^{p^2}| > 1$  pour  $|z| = p^2$ , donc  $z_0$  est répulsif. En particulier il appartient à  $J_Q$ . On remarque maintenant que  $Q^2\{|z| < 1\} = Q\{|z| < p\} = \{|z| < p^{p^2+1}\}$ . On peut donc trouver une préimage de  $z_0$  par  $Q^2$  dans  $\{|z| < 1\}$  : on la note  $z_1$ .

Soit  $B'$  une boule fermée contenant  $z_0$  de rayon  $\varepsilon$  arbitrairement petit. Pour  $N$  assez grand,  $Q^N(B')$  contient  $J_Q$  car  $z_0 \in J_Q$ , donc il existe une boule fermée  $B$  de rayon  $\leq \varepsilon$  dont l'image par  $Q^N$  est la boule de rayon  $p^{-1/(p-1)}$ . Le point de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  associé à  $B$  est donc dans  $J_Q$ , et la préimage de  $B$  par  $Q^2$  est une boule fermée  $B_0$  de rayon comparable à  $\varepsilon$  dont le point de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  associé est aussi dans  $J_Q$ . Quitte à prendre  $\varepsilon$  assez petit, on peut donc s'arranger pour que  $B_0$  soit de diamètre  $< p^{-1/(p-1)}$  et incluse dans  $\{|z| < 1\}$ . Soit  $B_n = B(z_n, r_n)$  une suite de boules de telle sorte que  $Q(B_{n+1}) = B_n$  et  $B_n \subset \{|z| < 1\}$ . Par récurrence, on montre que  $\text{diam}(B_{n+1}) = (\text{diam}(B_n)/p)^{1/p} < p^{-1/(p-1)}$  donc  $\text{diam}(B_n) \rightarrow p^{-1/(p-1)}$ . De plus pour tout point  $|z| < 1$ , on a  $|Q(z)| = |p|z|^p$ , donc les centres de  $B_n$  vérifient aussi  $|z_n| \rightarrow p^{-1/(p-1)}$ . Si  $S_n$  est le point de  $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$  associé à  $B_n$ , ces estimations impliquent  $d_{\mathbb{H}_K}(S_n, S_*) \rightarrow 0$ , ce qui nous permet de conclure dans le cas  $S_0 = S_*$ .

Soit maintenant  $S_0$  un point arbitraire de  $J_P$ , et  $\varepsilon > 0$ . L'ensemble  $U_\varepsilon = J_P \cap \{d_{\mathbb{H}_p}(S_0, \cdot) < \varepsilon\}$  définit un voisinage ouvert de  $S_0$  dans  $J_P$ . On a vu que  $P$  restreint

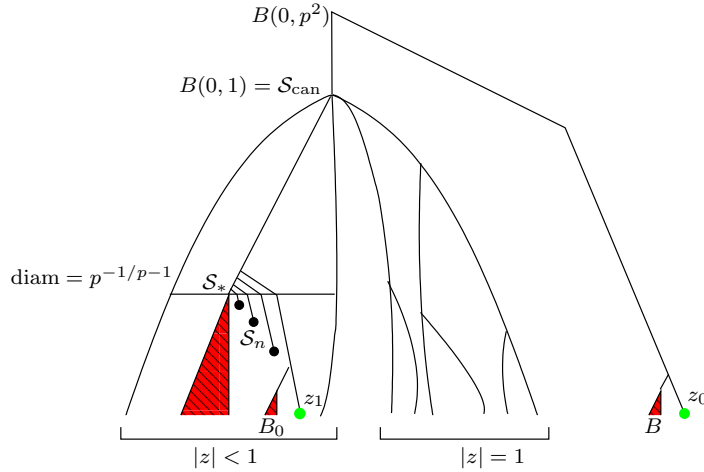


FIG. 4. Preuve du Lemme 5.8

à cet ensemble était conjugué au décalage, donc il existe un entier  $N \gg 1$  tel que  $P^N(U_\varepsilon) \supset J_P$ . Comme  $P = Q$  sur  $J_P$  et que  $Q$  est ouverte pour  $d_{\mathbb{H}_p}$ , on conclut que  $Q^N\{d_{\mathbb{H}_p}(\cdot, S_0) < \varepsilon\}$  contient un voisinage de  $S_*$  (toujours pour la métrique  $d_{\mathbb{H}_p}$ ). On peut donc trouver un point  $S' \in J_Q$  dans ce voisinage de diamètre  $< p^{-1/(p-1)}$ . Sa préimage  $\mathcal{S}$  dans  $\{d_{\mathbb{H}_p}(\cdot, S_0) \leq \varepsilon\}$  est de diamètre  $< p^{-1/(p-1)}$  et appartient à l'ensemble de Julia de  $Q$  car cet ensemble est totalement invariant. On a donc trouvé un point  $\mathcal{S} \in J_Q$  tel que  $d_{\mathbb{H}_p}(\mathcal{S}, S_0) \leq \varepsilon$  et  $\text{diam}(\mathcal{S}) < p^{-1/(p-1)}$ .  $\square$

#### RÉFÉRENCES

- [BD] F. Berteloot, C. Dupont. *Une caractérisation des endomorphismes de Lattès par leur mesure de Green*. Comment. Math. Helv. **80** (2005), 433–454.
- [BH] M. Baker, L.C. Hsia. *Canonical Heights, Transfinite Diameters, and Polynomial Dynamics*. J. Reine Angew. Math. **585** (2005), 61–92.
- [BR1] M. Baker, R. Rumely. *Equidistribution of small points, rational dynamics and potential theory*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), 625–688.
- [BR2] M. Baker, R. Rumely. *Potential theory on the Berkovich projective line*. Livre en préparation.
- [Ben] R. Benedetto. *Heights and preperiodic points of polynomials over function fields*. Int. Math. Res. Not. 2005, no. 62, 3855–3866.
- [Ber1] V.G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. Math. Surveys Monographs 33, Amer. Math. Soc. Providence RI, 1990.
- [Ber2] V.G. Berkovich. *Etale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **78** (1993), 5–161 (1994).
- [Bou] N. Bourbaki. *Topologie générale*. Hermann, Paris.
- [BGR] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert. *Non-Archimedean analysis*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 261. Springer-Verlag, Berlin, 1984. xii+436 pp.
- [Br] H. Brolin. *Invariant sets under iteration of rational functions*. Ark. Mat. **6** (1965), 103–144.
- [CL] A. Chambert-Loir. *Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich*. J. Reine Angew. Math. **595** (2006), 215–235.
- [CLT] A. Chambert-Loir, A. Thuillier. *Formule de Mahler et équidistribution logarithmique*. A paraître aux Annales de Fourier. Prépublication 2006, arxiv.org/abs/math.NT/0612556.



- [CLB] S. Cantat, S. Le Borgne. *Théorème limite central pour les endomorphismes holomorphes et les correspondances modulaires*. Int. Math. Res. Not. **56** (2005), 3479–3510. Version corrigée disponible à <http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/publications.html>
- [E] A. Escassut. *Ultrametric Banach algebras*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003. xiv+275 pp.
- [DPU] M. Denker, F. Przytycki, M. Urbanski. *On the transfer operator for rational functions on the Riemann sphere*. Ergodic Theory and Dynam. Systems **16** (1996), 255–266.
- [DS1] T.-C. Dinh, N. Sibony. *Dynamique des applications d'allure polynomiale*. J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 367–423.
- [DS2] T.-C. Dinh, N. Sibony. *Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds*. J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), 291–312.
- [DS3] T.-C. Dinh, N. Sibony. *Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps*. Comm. Pure Appl. Math. **59** (2006), 754–768.
- [FG] C. Favre, V. Guedj. *Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs*. Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), 881–934.
- [FJ] C. Favre, M. Jonsson. *The valuative tree*. Lecture Notes in Mathematics, 1853. Springer-Verlag, Berlin, 2004. xiv+234 pp.
- [FR1] C. Favre, J. Rivera-Letelier. *Théorème d'équidistribution de Brodin en dynamique p-adique*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **339** (2004), 271–276.
- [FR2] C. Favre, J. Rivera-Letelier. *Equidistribution quantitative des points de petite hauteur sur la droite projective*. Math. Ann. **335** (2006), 311–361. Corrigendum. Math. Ann. **339** (2007), 799–801.
- [FR3] C. Favre, J. Rivera-Letelier. *Propriétés ergodiques des fractions rationnelles modérées*. En préparation.
- [FS1] J.-E. Fornæss, N. Sibony. *Complex dynamics in higher dimensions*. Notes partially written by Estela A. Gavosto. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439, Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 131–186, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [FS2] J.-E. Fornæss, N. Sibony. *Complex dynamics in higher dimension. II*. Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992), 135–182, Ann. of Math. Stud., 137, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.
- [FLM] A. Freire, A. Lopes, R. Mañé. *An invariant measure for rational maps*. Bol. Soc. Brasil. Mat. **14** (1983), 45–62.
- [Go] M.I. Gordin. *The central limit theorem for stationary processes*. Dokl. Akad. Nauk SSSR **188** 1969 739–741.
- [Gr] M. Gromov. *On the entropy of holomorphic maps*. Enseign. Math. (2) **49** (2003), no. 3-4, 217–235.
- [Gu] V. Guedj. *Propriétés ergodiques des applications rationnelles*. Prépublication 2006 (130 pages), [arxiv.org/abs/math.CV/0611302](http://arxiv.org/abs/math.CV/0611302).
- [H] N. Haydn. *Convergence of the transfer operator for rational maps*. Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), 657–669.
- [HY] M. Herman, J.C. Yoccoz. *Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields*. In Geometric Dynamics (Rio de Janeiro 1981) LNM 1007, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983, 408–447.
- [Hö] L.V. Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*. Third edition. North-Holland Mathematical Library, 7. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.
- [KS] S. Kawaguchi and J. Silverman. *Nonarchimedean Green functions and dynamics on projective space*. Prépublication 2007, [arxiv.org/abs/arXiv:0706.2169](http://arxiv.org/abs/arXiv:0706.2169)
- [K] J. Kiwi. *Puiseux series polynomial dynamics and iteration of complex cubic polynomials* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **56** (2006), 1337–1404.

- [Li] C. Liverani. *Central limit theorem for deterministic systems*. International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995), 56–75, Pitman Res. Notes Math. Ser., 362, Longman, Harlow, 1996.
- [Lj] M. J. Ljubich. *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*. Ergodic Theory Dynam. Systems **3** (1983), 351–385.
- [Man] R. Mañé. *On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps*. Bol. Soc. Brasil. Mat. **14** (1983), 27–43.
- [Mat] H. Matsumura. *Commutative algebra*. W. A. Benjamin, Inc., New York 1970 xii+262 pp.
- [May] V. Mayer. *Comparing measures and invariant line fields*. Ergodic Theory Dynam. Systems **22** (2002), 555–570.
- [Mi1] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Annals of Mathematics Studies, 160. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. viii+304 pp.
- [Mi2] J. Milnor. *On Lattès Maps*. Dynamics on the Riemann sphere, 9–43, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [Mis] M. Misiurewicz. *A short proof of the variational principle for a  $Z_+^N$  action on a compact space*. International Conference on Dynamical Systems in Mathematical Physics (Rennes, 1975), pp. 147–157. Asterisque, No. 40, Soc. Math. France, Paris, 1976.
- [MS] P. Morton, J. Silverman. *Periodic points, multiplicities, and dynamical units*. J. Reine Angew. Math. **461** (1995), 81–122.
- [P] W. Parry. *Entropy and generators in ergodic theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969 xii+124 pp.
- [PST] J. Pineiro, L. Szpiro, T.J. Tucker. *Mahler measure for dynamical systems on  $\mathcal{P}^1$  and intersection theory on a singular arithmetic surface*. Geometric methods in algebra and number theory, 219–250, Progr. Math., 235, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.
- [PU] F. Przytycki, M. Urbanski. *Fractals in the Plane – the Ergodic Theory Methods*. A paraitre au Cambridge Univ. Press.
- [R1] J. Rivera-Letelier. *Dynamique des fractions rationnelles sur des corps locaux*. Thèse, Orsay 2000.
- [R2] J. Rivera-Letelier. *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*. Astérisque **287** (2003), 147–230.
- [R3] J. Rivera-Letelier. *Espace hyperbolique  $p$ -adique et dynamique des fonctions rationnelles*. Compositio Mathematica **138** (2003), 199–231.
- [R4] J. Rivera-Letelier. *Points périodiques des fonctions rationnelles dans l'espace hyperbolique  $p$ -adique*. Comment. Math. Helv. **80** (2005), 593–629.
- [R5] J. Rivera-Letelier. *Sur la structure des ensembles de Fatou  $p$ -adiques*. Prépublication (2004), [www.arxiv.org/math.DS/0412180](http://www.arxiv.org/math.DS/0412180).
- [R6] J. Rivera-Letelier. *Notes sur la droite projective de Berkovich*. Prépublication 2006, [www.arxiv.org/math.MG/0605676](http://www.arxiv.org/math.MG/0605676).
- [R7] J. Rivera-Letelier. *Théorie de Julia et Fatou sur la droite projective de Berkovich*. En préparation.
- [Rob] A. Robert. *A course in  $p$ -adic analysis*. Graduate Texts in Mathematics, 198. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Roq] P. Roquette. *Analytic theory of elliptic functions over local fields*. Hamburger Mathematische Einzelschriften (N.F.), Heft I Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970
- [Ru] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. xiv+416 pp.
- [Sib] N. Sibony. *Dynamique des applications rationnelles de  $\mathbb{P}^k$* . Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997), ix–x, xi–xii, 97–185, Panor. Synthèses, 8, Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [Sil1] J. Silverman. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves*. Graduate Texts in Mathematics, 151. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Sil2] J. Silverman. *The arithmetic of dynamical systems*. Graduate Texts in Mathematics, 241. Springer-Verlag, New York, 2007.

- [ST] L. Szpiro, T.J. Tucker. *Equidistribution and generalized Mahler measures*. Prépublication, [arxiv.org/abs/math.NT/0510404](https://arxiv.org/abs/math.NT/0510404).
- [Th] A. Thuillier. *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non-archimédienne*. Thèse de l'université de Rennes, 2005.
- [Ti] J. Tits. *A theorem of Lie-Kolchin for trees*. Contributions to Algebra (Collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), Academic Press, New York, 1977, 377-388.
- [To] P. Tortrat. *Aspects potentialistes de l'itération des polynômes*. Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, No. 8, 195–209, Lecture Notes in Math., 1235, Springer, Berlin, 1987.
- [W] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. ix+250 pp.
- [Y] J.C. Yoccoz. *Notes sur la géométrie et la dynamique  $p$ -adique*. Cours au Collège de France 2001/2002.
- [ZS] Zariski, O., Samuel, P. *Commutative algebra. Vol. 2*. Graduate Texts in Mathematics, No. 29. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1975).
- [Z] A. Zdunik. *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps*. Invent. Math. **99** (1990), 627-649.

CHARLES FAVRE, CNRS ET INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, ÉQUIPE GÉOMÉTRIE ET DYNAMIQUE, CASE 7012, 2 PLACE JUSSIEU, F-75251 PARIS CEDEX 05, FRANCE, AND UNIDADE MISTA CNRS-IMPA, DONA CASTORINA 110, RIO DE JANEIRO, 22460-320, BRAZIL.

*E-mail address:* favre@math.jussieu.fr

JUAN RIVERA-LETELIER, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, CAMPUS SAN JOAQUÍN, P. UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, AVENIDA VICUÑA MACKENNA 4860, SANTIAGO, CHILE

*E-mail address:* riveraletelier@mat.puc.cl